ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 6 August 1926 Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Verfahren zur Berechnung des Auftriebes gegebener Tragflächen-Profile.

Von FRITZ HÖHNDORF.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin.)[1]

In zwei Arbeiten: »Zur Theorie des Tragflächenauftriebes«[2]) hat Hr. v. Mises ein allgemeines Verfahren angegeben, nach welchem man unter den Annahmen der klassischen Theorie der ebenen, wirbelfreien Bewegung die Größe und das Moment der Auftriebsresultierenden eines Tragflügels berechnen kann. In der ersten Mitteilung wird gezeigt, daß sich diese Größen errechnen lassen aus den ersten Koeffizienten der Potenzreihe, welche das Aeußere eines Profils konform auf das Aeußere eines Kreises so abbildet, daß das Unendlichferne erhalten bleibt, sowie aus dem Mittelpunkt und dem Radius dieses Bildkreises. Die zweite Mitteilung beschäftigt sich im wesentlichen mit der Aufgabe, zu gegebenen Auftriebsverhältnissen geeignete Profilformen zu konstruieren.

Die umgekehrte Aufgabe, für ein gegebenes Profil die Auftriebsgrößen zu finden, hat Hr. J. Geckeler in seiner Dissertation[3]) behandelt. Er zeichnet das Profil in ein System konfokaler Kegelschnitte und überträgt es von dort unter Benutzung der Abbildung $\zeta = Z + \frac{1}{Z}$ auf das System der Kreise um den Nullpunkt mit ihren Radien. Er erhält dabei näherungsweise Ellipsen — die Interpolation liefert hauptsächlich in der Nähe des

[1]) Diese Arbeit ist von der philosophischen Fakultät der Universität Berlin als Dr.-Dissertation angenommen worden. Referenten: Prof. v. Mises und Prof. Bieberbach. Ein die wesentlichen Ergebnisse enthaltender Entwurf ist mir im Februar 1925 vorgelegt worden, während die im Oktoberheft 1925 veröffentlichte Abhandlung von W. Müller, die sich mit der vorliegenden in vielen Punkten berührt, am 7. Januar 1925 der Schriftleitung zugegangen ist, woraus die Unabhängigkeit der beiden Arbeiten erhellt. Der Herausgeber.

[2]) Vergl. Z. f. Flugtechnik, 1917, S. 157 und 1920, S. 68 und 87.

[3]) »Ueber Auftrieb und statische Längsstabilität von Flugzeugtragflächen in ihrer Abhängigkeit von der Profilform«, München 1921.

Profilkopfes ungenaue Werte, — und bestimmt aus deren Achsen und dem Bilde der Spitzen durch einfache Formeln die entsprechenden Werte für den Kreis. Weicht das Profilbild stark von der Form einer Ellipse ab, so wendet er auf dieses Gebilde die gleiche Transformation $\zeta = Z + \frac{1}{Z}$ an, und behandelt die dann erhaltenen Figuren als Ellipsen.

Unsere Aufgabe soll es nun sein, für ein gegebenes Profil die Koeffizienten der oben erwähnten Abbildungsfunktion zahlenmäßig zu bestimmen, also die Transformation des Profils auf einen Kreis tatsächlich durchzuführen. Dazu gehen wir den folgenden Weg. Wir bringen zunächst die Unstetigkeitsstelle an der Profilspitze in geeigneter Weise fort, indem wir das Profil Punkt für Punkt auf eine kreisähnliche Figur ohne Unstetigkeitsstelle abbilden. — Die Transformation ist so gewählt, daß, wenn wir sie auf ein Profil der dreifach unendlichen Schar der sogenannten »Joukowsky-Profile« anwenden, wir einen Kreis erhalten. — Diese kreisähnliche Figur bilden wir auf einen Kreis ab nach einem Verfahren, das Hr. Bieberbach angegeben hat[1]).

1. Kurze Ableitung der Auftriebsformeln. Die klassische Theorie der Hydromechanik lehrt, daß zur Darstellung der ebenen, wirbelfreien Bewegung einer idealen Flüssigkeit ($z = x + i\,y$) eine analytische Funktion $W(z) = P + i\,Q$ mit folgenden Eigenschaften dient: Es sind

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = v_y$$

die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung, daher

$$W' = v_x - i\,v_y = \bar{\mathfrak{v}},$$

gleich dem Spiegelbild des Geschwindigkeitsvektors.

Man nennt die Kurven $Q =$ konst. Stromlinien, und die Kurven $P =$ konst. sind die dazu senkrechten Linien gleichen Potentials.

Für unseren Fall ist $W(z)$ so zu wählen, daß

1. eine Linie $Q =$ konst. das Profil darstellt, damit die Geschwindigkeit in jedem Punkte des Profilumrisses tangential zu diesem gerichtet ist, und daß
2. im Unendlichfernen alle Punkte gleiche Geschwindigkeit nach Größe und Richtung aufweisen.

Die Funktion $W(z')$, welche die Bewegung mit den gleichen Bedingungen im Unendlichfernen um einen geschlossenen Kreis beschreibt sei bekannt; machen wir die Substitution

$$z' = f(z)$$

(f eine analytische Funktion), so ist

1. $W(z)$ wieder analytisch und stellt somit eine mögliche Bewegung dar, und es gehen
2. die Stromlinien der ersten Bewegung (also um den Kreis) über in die der zweiten (also bei geeigneter Wahl von f in eine Strömung um das Profil).

Es handelt sich daher im Einzelfall um eine Aufgabe der konformen Abbildung, nämlich die richtige Bestimmung der Transformationsfunktion f.

Nun lautet die Funktion für die allgemeinste in den kleinsten Teilen wirbelfreie Bewegung im Außenraume eines Kreises mit dem Mittelpunkte $z'' = 0$ und dem Radius a, bei der im Unendlichen eine Geschwindigkeit von der Größe u in Richtung der negativen x-Achse herrscht:

$$W(z'') = -u\left(z'' + \frac{a^2}{z''}\right) - i \cdot \frac{J}{2\pi} \cdot \ln z'',$$

wo J eine reelle Konstante, die »Zirkulation« bezeichnet.

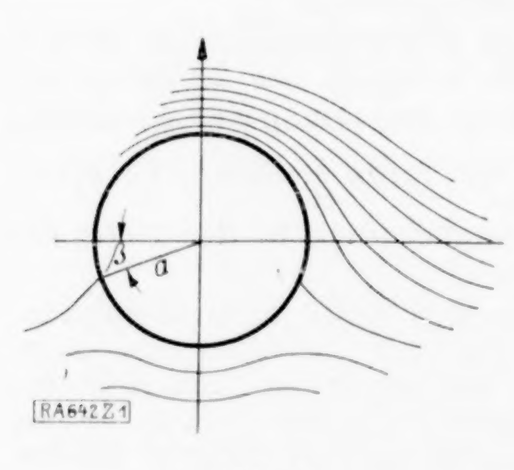


Abb. 1.

Abb. 1 zeigt den Verlauf einer solchen Strömung mit $J > 0$. Da die Geschwindigkeitsverteilung zur y-Achse, nicht aber zur x-Achse symmetrisch ist, folgt aus dem Bernoullischen Gesetz, daß ein resultierender Druck nur senkrecht zur x-Achse auf den umströmten Kreis aus-

[1]) Vergl. z. B. die Abhandlung: »Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung«. Rendiconti di Palermo, Bd. 38, 1914.

geübt werden kann. Es existiert eine ausgezeichnete Stromlinie, die den Kreis trifft, sich dort spaltet, ihn umschließt und sich in dem, in bezug auf die y-Achse symmetrisch zum ersten »Spaltungspunkt« gelegenen, zweiten wieder vereinigt; in beiden Punkten muß die Strömungsgeschwindigkeit verschwinden. Ihre Lage ist allein von der Größe der Zirkulation abhängig und umgekehrt bestimmen diese Punkte die Zirkulation.

Wählen wir zum Mittelpunkt des Kreises den Punkt $m \neq 0$, so müssen wir $z' - m$ für z'' in W einführen (vergl. Abb. 2). Sei ferner die Geschwindigkeit im Unendlichen gegen die Richtung der negativen x-Achse um den Winkel α geneigt, so haben wir noch $(z' - m)$ mit $e^{i\alpha}$ zu multiplizieren. α wird dabei gemessen von der Zuströmrichtung zur x-Achse, in Analogie zu der in der Praxis üblichen Messung der Anstellwinkel.

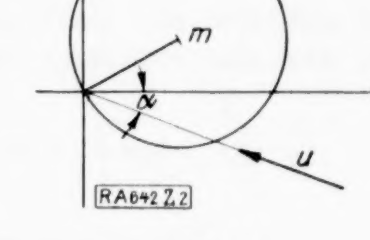


Abb. 2.

$W[(z' - m) \cdot e^{i\alpha}]$ stellt demnach die Strömung um den Kreis $|z' - m| = a$ unter dem »Anstellwinkel« α dar.

Daraus bestimmt sich die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der z-Ebene (natürlich nicht innerhalb des Kreises) durch:

$$v_x - i\,v_y = W' = \frac{dW}{dz'} = \frac{dW}{dz''} \cdot \frac{dz''}{dz'} = \left[-u\left(1 - \frac{a^2}{z''^2}\right) - i \cdot \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{1}{z''}\right] \cdot e^{i\alpha}.$$

In den Staupunkten muß mit dem Geschwindigkeitsvektor $v_x + i\,v_y$ auch der obige Ausdruck verschwinden.

Der linke Staupunkt sei bestimmt durch:

$$z' = m - a \cdot e^{\beta i} \quad \text{also} \quad z'' = -a \cdot e^{(\alpha+\beta)i} \quad \text{(vergl Abb. 1).}$$

Führt man diesen Wert für z'' in $W' = 0$ ein, so ergibt sich:

$$i \cdot \frac{J}{2\pi} = u\,a \cdot \left(e^{(\alpha+\beta)i} - e^{-(\alpha+\beta)i}\right) \quad \text{oder} \quad J = 4\pi u a \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Führen wir nun durch die oben erwähnte Transformation $z' = f(z)$ als neue Variable z in W ein, so wird:

$$\overline{\mathfrak{v}} = v_x - i\,v_y = \left(\frac{dW}{dz''} \cdot \frac{dz''}{dz'}\right) \cdot \frac{df}{dz}.$$

Nun weisen alle praktisch verwandten Tragflächenprofile am hinteren Ende eine Spitze oder scharfe Ecke auf; dort wird $\frac{df}{dz}$ unendlich groß, also muß, damit $\mathfrak{v}$ endlich bleibt, der Klammerausdruck in unserer Formel verschwinden. Kennt man die Stelle β des Kreises, in die sich die Spitze des Profils abbildet, so liefert der oben gefundene Ausdruck für J den Wert, den die Zirkulation im gegebenen Falle annehmen muß, damit $\mathfrak{v}$ endlich bleibt, also die Bernoullische Gleichung keinen negativen Druck ergibt.

Nach dem Impuls-Satze ist die Summe der auf einen beliebig abgegrenzten Flüssigkeitsteil wirkenden äußeren Kräfte gleich dem Ueberschuß der an den Grenzen in der Zeiteinheit austretenden Bewegungsgröße über die eintretende.

Diesen Satz wollen wir auf einen Flüssigkeitsteil anwenden, der einerseits von dem Tragflächenprofil und andererseits von einem mit dem Radius R um den Nullpunkt geschlagenen Kreise, der das Profil vollkommen umschließt, begrenzt ist. Das Koordinatensystem wählen wir so, daß die positive x-Achse mit der Profilsehne (der von der Profilspitze an das Profil gelegten Tangente in dieser Richtung) zusammenfällt; der Nullpunkt liegt auf der Profilsehne.

Dann wirken als äußere Kräfte auf den Flüssigkeitsteil:

1. $-\mathfrak{P} = -P_x - i\,P_y$, wenn wir mit $\mathfrak{P}$ den resultierenden Druck auf das Profil bezeichnen,
2. der Druck auf die äußere Begrenzung.

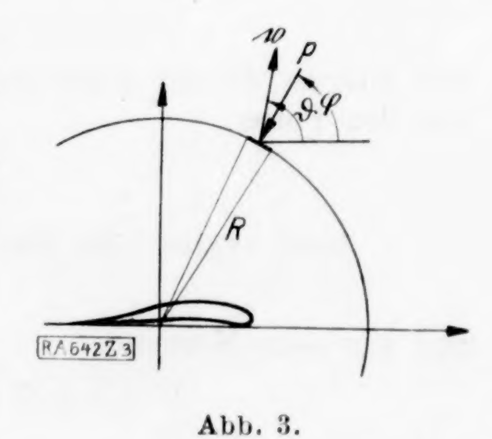


Abb. 3.

Es sei p der Druck auf die Flächeneinheit und φ der Winkel der nach außen gerichteten Kreisnormalen mit der x-Achse; vgl. Abb. 3. Dann wird der Gesamtdruck auf die äußere Fläche dargestellt durch den Kraftvektor:

$$-R \cdot \int_0^{2\pi} p\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Mit Hilfe des Bernoullischen Gesetzes

$$p = \text{konst.} - \frac{\mu}{2} v^2$$

(μ = spez. Masse der Luft) können wir v in diesen Ausdruck einführen.

Die Bewegungsgröße ist $\mu \mathfrak{v}$, bezeichnet ϑ den Winkel von $\mathfrak{v}$ mit der x-Achse, so wird:

$$\mu v_x = \mu v \cdot \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \mu v_y = \mu v \cdot \sin\vartheta.$$

Die nach auswärts positiv gerechnete radiale Geschwindigkeit ist:

$$v \cdot \cos(\vartheta - \varphi).$$

Die gesamte pro Zeiteinheit durch den Kreisumfang austretende Bewegungsgröße (abzüglich der eintretenden) hat also die Komponenten:

$$\int_0^{2\pi} \mu v \cos\vartheta \cdot v \cos(\vartheta - \varphi) \cdot R\, d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \mu v \sin\vartheta \cdot v \cos(\vartheta - \varphi) \cdot R\, d\varphi.$$

Also lautet unsere aus dem Impulssatz folgende Gleichung in vektorieller Form:

$$-\mathfrak{P} + \frac{R \cdot \mu}{2} \cdot \int_0^{2\pi} v^2 \cdot e^{i\varphi}\, d\varphi = R \cdot \mu \int_0^{2\pi} v^2 \cos(\vartheta - \varphi)\, e^{i\vartheta} \cdot R\, d\varphi.$$

Beachten wir, daß:

$$2 \cdot \cos(\vartheta - \varphi) = e^{(\vartheta - \varphi) i} + e^{-(\vartheta - \varphi) i}$$

und:

$$W' = \bar{\mathfrak{v}} = v \cdot e^{-\vartheta i}$$

ist, und ersetzen überall $-i$ durch $+i$, so folgt:

$$P_x - i\, P_y = \bar{\mathfrak{P}} = \frac{R\mu}{2} \cdot \int_0^{2\pi} W'^2 \cdot e^{i\varphi}\, d\varphi,$$

wobei in W' die Größe $z = R \cdot e^{i\varphi}$ einzusetzen ist.

Analog wenden wir zur Bestimmung des Auftriebsmomentes den Impulssatz auf das Moment der äußeren Kräfte und das der Bewegungsgröße an. Das Moment von $\mathfrak{P}$, bezogen auf den Koordinatenanfangspunkt, sei M, das der äußeren Drücke verschwindet, und das der Bewegungsgröße ist: $\mu \cdot R \cdot \sin(\vartheta - \varphi)$. Die Gleichung lautet also:

$$-M = \int_0^{2\pi} \mu v \cdot R \cdot \sin(\vartheta - \varphi) \cdot v \cos(\vartheta - \varphi) \cdot R\, d\varphi.$$

Es ist aber: $\quad W' \cdot e^{i\varphi} = v \cdot e^{-(\vartheta - \varphi) i} = v \cdot (\cos(\vartheta - \varphi) - i \sin(\vartheta - \varphi)).$

Daraus:

$$W'^2 \cdot e^{i 2\varphi} = v^2 \cdot [\cos^2(\vartheta - \varphi) - \sin^3(\vartheta - \varphi) - 2 \cdot i \cdot \cos(\vartheta - \varphi) \sin(\vartheta - \varphi)].$$

Setzt man die Konstanten vor das Integralzeichen, so wird der Integrand also gleich dem Imaginärteil von $-\frac{1}{2} W'^2 \cdot e^{2\varphi i}$. Also:

$$+M = \mu R^2 \cdot \Im \left\{ \int_0^{2\pi} + \frac{W'^2 \cdot e^{2\varphi i}}{2} \cdot d\varphi \right\}.$$

Wie wir später sehen werden, gilt für die Transformationsfunktion

$$z' = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots..$$

Wir führen diesen Ausdruck in $W(z')$ ein, bilden W'^2 und entwickeln es in eine Reihe von der Form:

$$W'^2 = B_0 + B_1 \cdot \frac{1}{z} + B_2 \cdot \frac{1}{z^2} + \ldots..$$

Jetzt ergibt sich für den Auftrieb, integriert und alles eingesetzt:

$$\bar{\mathfrak{P}} = -\pi \mu B_1 = -i \mu u J \cdot e^{\alpha i}$$

und für sein Moment:

$$M = \pi \mu \Im \{B_2\} = \pi \mu \Im \left\{ -2 u^2 a_1 \cdot e^{2\alpha i} + i \frac{u J}{\pi} \cdot m \cdot e^{\alpha i} \right\}.$$

Ersetzen wir in der Auftriebsformel $-i$ durch $+i$, so folgt:

$$P_x + i\,P_y = \mathfrak{P} = +\,i\,\mu\,u\,J \cdot e^{-\alpha i} = \mu\,u\,J \cdot e^{(\pi/2-\alpha)\,i}.$$

Der Auftrieb hat also die Größe:

$$|\mathfrak{P}| = A = \mu\,u\,J$$

und die Richtung senkrecht auf der durch α bestimmten Zuströmrichtung.

Ersetzen wir noch J durch $4\,\pi\,u\,a \cdot \sin(\alpha+\beta)$, so wird:

$$A = 4\,\pi\,\mu\,u^2 \cdot a \sin(\alpha+\beta).$$

Dividiert man schließlich A durch die Profiltiefe t und den Staudruck $^1/_2\,\mu\,u^2$, so erhält man die sogenannte Auftriebszahl:

$$c_a = 8\,\pi\,\frac{a}{t} \cdot \sin(\alpha+\beta).$$

In der Formel für das Moment setzen wir:

$$a_1 = -\,c_1{}^2 \cdot e^{2\gamma} \qquad (c_1 \text{ und } \gamma \text{ reell})$$

und ebenso:

$$m = |m| \cdot e^{\delta i}.$$

Dann wird:

$$M = 2\,\pi\,\mu\,u^2 \cdot c_1{}^2 \cdot \sin 2(\alpha+\gamma) + \mu\,u\,J \cdot |m| \cdot \cos(a+\delta).$$

Wählen wir m zum Bezugspunkt (vgl. Abb. 6), dann wird:

$$M_1 = 2\,\mu\,\pi\,u^2 \cdot c_1{}^2 \cdot \sin^2(\alpha+\gamma)$$

die Formel, die Hr. v. Mises für das Moment errechnet hat.

Dividiert man hier durch t^2 und den Staudruck, so erhält man die dimensionslose Zahl:

$$c_{m\,1} = 4\,\pi\,\frac{c_1{}^2}{t^2} \cdot 2 \sin(\alpha+\gamma).$$

Bei den Messungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen wird als Bezugspunkt für das Moment der Auftriebsresultierenden der Schnittpunkt der Profilsehne mit der auf ihr senkrecht stehenden Tangente an den Profilkopf benutzt; dieser Punkt hat also von der Profilspitze gerade den Abstand t. Um für das Rechnen zu einer bequemeren Näherungsformel zu gelangen, wollen wir hier als Bezugspunkt den Schnittpunkt des Profilkopfes mit der x-Achse, bei unserer zweiten Wahl (vgl. Abschn. **3**) des Koordinatensystems, wählen, um näherungsweise die Ergebnisse vergleichen zu können. Dieser Punkt habe die reelle Koordinate b, und es ist

$$b = \frac{t}{\cos\iota} - \varkappa\,c,$$

worin ι der Winkel zwischen der Profilsehne und der x-Achse ist (vgl. Abb. 6). Es wird dann:

$$M_2 = M - A \cdot b \cdot \cos\alpha = M_1 + A \cdot [\,|m| \cdot \cos(\alpha+\delta) - b \cdot \cos\alpha\,].$$

Dividiert man durch t^2 und den Staudruck und kehrt das Vorzeichen auf einer Seite um, so erhält man (näherungsweise) die von Hrn. Prandtl benutzte Momentenzahl:

$$c_{m\,2} = \frac{c_a}{t} \cdot [\,b\cos\alpha - |m| \cdot \cos(\alpha+\delta)\,] - c_{m\,1}.$$

Wegen der verschiedenen Wahl des Koordinatensystems bei den Ableitungen der Formeln für den Auftrieb und für die konforme Abbildung ist an Stelle des Anstellwinkels α der Winkel $(\alpha+\iota)$ in den Formeln für c_a und c_m einzusetzen.

2. Ueber Joukowsky-Profile. Die Transformation:

$$\frac{z-2\,c}{z+2\,c} = \left(\frac{\zeta-c}{\zeta+c}\right)^2$$

führt den Kreis K der ζ-Ebene (vgl. Abb. 4) durch die reellen Punkte $\pm\,c$ über in den

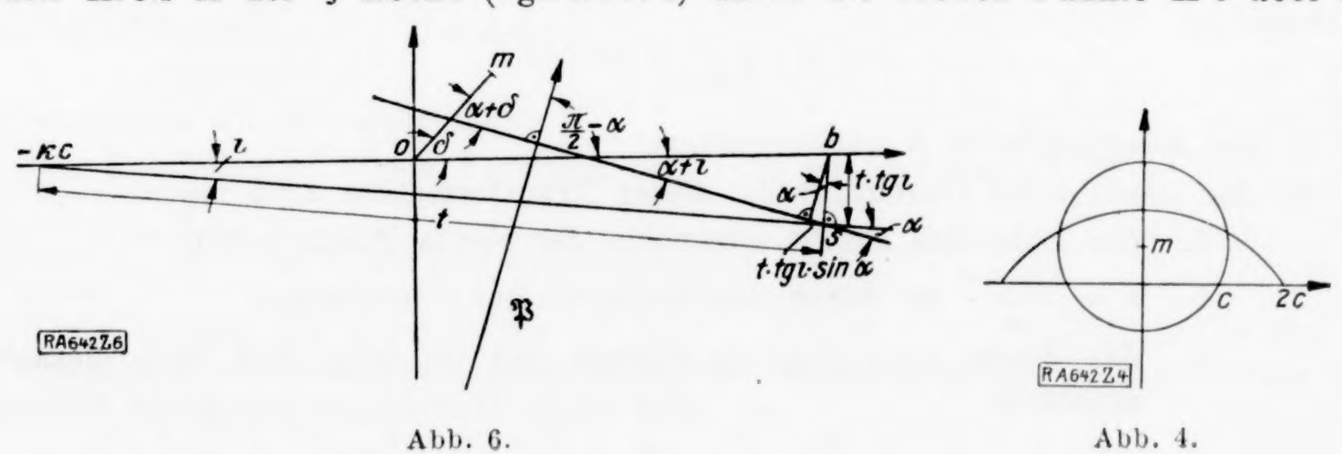


Abb. 6. Abb. 4.

doppelt durchlaufenen Kreisbogen B der z-Ebene durch die Punkte $\pm 2c$. Die Pfeilhöhe von B ist gleich $2 \cdot 0$ m.

Die inverse Transformation:

$$\frac{\zeta - c}{\zeta + c} = \left(\frac{z - 2c}{z + 2c}\right)^{1/2}$$

läßt zu dem Bogen durch $\pm 2c$ den Kreis durch $\pm c$ finden; der Mittelpunkt halbiert die Pfeilhöhe von B.

Setzen wir:

$$\varkappa = \frac{2\pi - \sigma}{\pi},$$

so bildet:

$$\frac{z - \varkappa c}{z + \varkappa c} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c}\right)^{\varkappa} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

unseren Kreis K auf ein Kreisbogenzweieck ab, dessen Bögen sich in den Punkten $\pm \varkappa c$ unter dem Winkel σ schneiden. Auch hier bestimmt die Wahl von m die Wölbung und umgekehrt.

Wegen der Kleinheit der für Flugzeugprofile in Betracht kommenden Spitzenwinkel σ liegt $\varkappa$ immer sehr dicht unterhalb der Zahl 2.

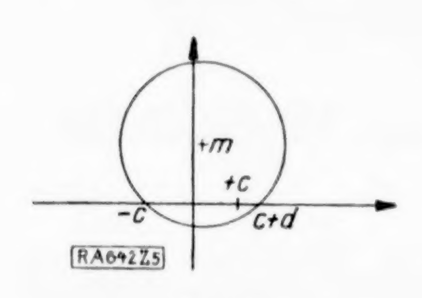


Abb. 5.

Geht jetzt der Kreis nur durch den Punkt $-c$ und enthält den Punkt $+c$ im Innern nahe am Rande, so liefert unsere Transformation (1) eigentliche Joukowsky-Profile für $\sigma = 0$ und erweiterte für $\sigma \neq 0$.

Für die Durchführung der inversen Transformation ist zunächst der Punkt $\varkappa c$ in einem derartigen gegebenen Profile zu bestimmen. Wir bezeichnen zu diesem Zweck den positiven Schnittpunkt von K mit der reellen Achse durch $c + d$ (vgl. Abb. 5). Dann folgt aus (1), daß der Bildpunkt von $c + d$ auch reell ist. Seinen Abstand von $\varkappa c$ (dem Bilde von c) kann man abschätzen. Die Transformation (1) läßt sich nämlich auf die Form bringen:

$$z = \zeta + \frac{\varkappa^2 - 1}{3} \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\zeta} - \frac{(\varkappa^4 - 5\varkappa^2 + 4)\, c^4}{45} \cdot \frac{1}{\zeta^3} + \ldots .$$

Setzen wir für $\varkappa$ seinen Zahlenwert — der Wert $\varkappa = 1{,}9$, d. h. $\sigma = 18^0$, wird in der Praxis wohl kaum unterschritten — und für ζ die Werte c und $(c + d)$ ein und beachten, daß d eine kleine Zahl ist, dann ergibt sich, daß der Abstand der beiden Bildpunkte annähernd gleich $\frac{d^2}{c}$ gesetzt werden kann.

Aus den Ueberlegungen zu Beginn dieses Abschnittes geht — wegen der Stetigkeit des Ueberganges — hervor, daß das Profil sich umsomehr einem Kreisbogen bzw. einem Kreiszweieck nähern wird, je kleiner der Abstand d ist. Daraus folgt, wenn man noch die obigen Abschätzungen beachtet, für die Bestimmung von $\varkappa c$, daß dieser Punkt bei schlanken Profilen sehr nahe am Profilumriß liegt. Durch Beachten dieses Ueberganges erkennt man ferner, daß $\varkappa c$ in der Nähe der Stelle größter Krümmung liegen muß. Wird d größer, so wird der Vorderteil des Profils dicker — auf die Profildicke in der Mitte ist auch der Winkel σ von Einfluß —. Als weiteres Hilfsmittel zur Bestimmung von $\varkappa c$ diene noch das folgende: je geringer der Abstand des Kreismittelpunktes von der reellen Achse ist, desto geringer ist die Wölbung des Profils und desto symmetrischer ist der Profilkopf; $\varkappa c$ wird auf der Symmetrielinie liegen. Bei starker Wölbung wird die Unterseite des Profilkopfes flacher, und $\varkappa c$ wird tiefer zu liegen kommen.

Ist ein erweitertes Joukowski-Profil gegeben, so wird es durch die zu (1) inverse Transformation:

$$\frac{\zeta - c}{\zeta + c} = \left(\frac{z - \varkappa c}{z + \varkappa c}\right)^{1/\varkappa} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

wieder in den Ausgangskreis K zurückgeführt.

Für die tatsächliche Durchführung dieser Transformation weiß man:

1. der Ecke des Profils entspricht der reelle Punkt $-\varkappa c$;
2. $\varkappa = \frac{2\pi - \sigma}{\pi}$ ist durch den Eckenwinkel σ bestimmt;
3. der Punkt $+\varkappa c$ liegt im Innern und ist nach dem eben Gesagten zu ermitteln.

Ist dieser Punkt genau bestimmt, so werden wir unseren Ausgangskreis K erhalten; ist er es nur angenähert, so werden wir ein kreisähnliches Gebilde erhalten, das wir dann weiter transformieren müssen. Eine kreisähnliche Figur werden wir aber auch dann erhalten, wenn wir ein beliebiges Profil als ein erweitertes Joukowskisches auffassen und darauf die Transformation (2) anwenden.

3. Entwicklung der Formeln für die konforme Abbildung des kreisähnlichen Gebietes. Die Methode des Hrn. Bieberbach, nach welcher wir das kreisähnliche Gebilde auf einen Kreis abbilden wollen, läßt sich in die folgende Form kleiden:

Das Innere eines einfach zusammenhängenden schlichten und beschränkten Gebietes der z-Ebene, das den Nullpunkt enthält, wird durch:

$$f(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots\ldots$$

stetig auf das Innere eines Kreises so abgebildet, daß der Nullpunkt fest bleibt und die Funktion dort eine Ableitung vom Werte 1 hat, wenn die Koeffizienten b_ν den Gleichungssystemen:

$$\begin{aligned} & z_{01} + 2\, z_{11}\, b_2 + 3\, z_{21}\, b_3 + \ldots = 0 \qquad && z_{10} + 2\, z_{11}\, \overline{b}_2 + 3\, z_{12}\, \overline{b}_3 + \ldots = 0 \\ & z_{02} + 2\, z_{12}\, b_2 + 3\, z_{22}\, b_3 + \ldots = 0 \quad \text{und} && z_{20} + 2\, z_{21}\, \overline{b}_2 + 3\, z_{22}\, \overline{b}_3 + \ldots = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

genügen, wo $z_{\mu\nu} = \iint z^\mu \cdot \overline{z}^\nu \, d\,\omega$, integriert über den ganzen Bereich, gesetzt ist.

Zwar ist hier nichts über den Rand des Bereiches ausgesagt, doch geben uns die genannte[1]) und andere Arbeiten desselben Verfassers[2]) die Berechtigung, eine genügend gute Konvergenz des Verfahrens auch für die Randpunkte anzunehmen. Näheres später.

Wir haben nun im ersten Abschnitt von der Abbildungsfunktion f verlangt:

1. sie soll das Profil in den Kreis überführen;
2. sie soll den Außenraum des Profiles stetig auf den Außenraum des Kreises abbilden;
3. sie soll das Unendliche unverändert lassen.

Unsere Transformation (2) erfüllt diese Bedingungen nur insofern, als für »Kreis« »kreisähnliches Gebilde« zu setzen ist. Die eben definierte Funktion läßt den Nullpunkt und seine Umgebung unverändert und bildet das Innere des Bereiches auf das Innere eines bestimmten Kreises ab. Wir müssen also die ganze Ebene an einem Kreise spiegeln, um die obige Methode anwenden zu können. Als diesen Kreis wählte ich jenen, der

1. mit dem kreisähnlichen Gebiete gleichen Inhalt hat, (Augenmaß) und
2. die kreisähnliche Figur im Bildpunkt der Spitze berührt.

Dieser Kreis habe den Mittelpunkt μ und den Radius ϱ, dann ist also zu setzen:

$$\zeta_1 = \zeta - \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\zeta_2 = \frac{\varrho}{\zeta_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Der gewählte Kreis geht dabei in den Einheitskreis über.

Wir müssen jetzt die Koeffizienten b_ν bestimmen, und können dann setzen:

$$Z = \zeta_2 + b_2\, \zeta_2^{\,2} + b_3\, \zeta_2^{\,3} + \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Spiegeln wir noch einmal:

$$z' = \frac{\varrho}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

so ist z' als Funktion von z geschrieben:

$$z' = f(z)$$

unsere verlangte Abbildungsfunktion.

Die Koeffizienten dieser Funktion sind jetzt zu berechnen. Es ist:

$$z' = \frac{\varrho}{Z} = \frac{\varrho}{\zeta_2} \cdot \frac{1}{1 + b_2\, \zeta_2 + b_3\, \zeta_2^{\,2} + \ldots} = \frac{\varrho}{\zeta_2} \cdot (\beta_{-1} + \beta_0\, \zeta_2 + \beta_1\, \zeta_2^{\,2} + \ldots).$$

---

[1]) Vgl. Rendiconti a. a. O.

[2]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Ueber die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche, Sitzungsber. d. Pr. Akad. d. W., 1924, S. 181 bis 188.

Die β_ν erhält man, wenn man den Bruch in eine Taylorsche Reihe entwickelt:

$$\beta_{-1} = 1\,, \quad \beta_0 = -b_2\,, \quad \beta_1 = b_2{}^2 - b_3\,, \quad \beta_2 = 2\,b_2\,b_3 - b_2{}^3 - b_4\,,$$
$$\beta_3 = 2\,b_2\,b_4 - 3\,b_2{}^2\,b_3 + b_3{}^2 + b_2{}^4 - b_5\,.$$

Es wird weiter:

$$z' = \frac{\varrho}{\zeta_2} + \varrho\,\beta_0 + \varrho\,\beta_1\,\zeta_2 + \varrho\,\beta_2\cdot\zeta_2{}^2 + \ldots\,, \qquad z' = \zeta_1 + \varrho\,\beta_0 + \varrho^2\,\beta_1\cdot\frac{1}{\zeta_1} + \ldots \quad (7).$$

Die Werte ζ_1 sind unmittelbar der Zeichnung zu entnehmen, wenn man, wie wir nachher zeigen wollen, die Transformation (2) graphisch durchführt.

Setzen wir aber für ζ_1 die entsprechenden Werte ζ:

$$z' = \zeta - \mu + \varrho\,\beta_0 + \varrho^2\,\beta\cdot\frac{1}{\zeta-\mu} + \ldots$$

und hierin die aus (2) durch Reihenentwicklung folgenden Werte von z für ζ, so sieht man, daß $f(z)$ die Form hat:

$$z' = f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

Daß f diese Form haben muß, kann man ohne Rechnung folgendermaßen einsehen.

$f(z)$ soll eine analytische Funktion sein, also muß es durch eine Reihe dargestellt werden können.

Das Unendlichferne soll erhalten bleiben:

$$z' = f(z) \to z \quad \text{für} \quad z \to \infty\,,$$

es können also außer z nur noch Potenzen mit negativem Exponenten von z auftreten.

Seit Riemann ist bekannt, daß das Aeußere eines einfach zusammenhängenden Bereiches auf das Aeußere eines gegebenen Kreises abgebildet werden kann durch

$$F(z) = a_{-1}\,z + a_0 + a_1\,\frac{1}{z} + a_2\,\frac{1}{z^2} + \ldots$$

Wegen

$$F(z) \to z \quad \text{für} \quad z \to \infty$$

sind in unserem Falle zwei Koeffizienten gegeben: $a_{-1} = 1$, $a_0 = 0$, zwei Bedingungen, durch die der Kreis nach Lage und Größe bestimmt ist.

Bezeichnen wir also für einen Augenblick

$$z' = z + a_1\,\frac{1}{z} + a_2\,\frac{1}{z^2} + \ldots \quad \text{mit} \quad g(z)\,,$$

so bildet $g(z)$ unser Profil auf einen Kreis $a = |z' - m|$ ab, und sowohl der Mittelpunkt m als auch der Radius a sind durch $g(z)$ bestimmt. Daraus folgt nun, daß

$$g(z) - m$$

unser Profil auf einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius a abbildet.

Für unsere Formel (7) folgt aus alledem:

1. der Mittelpunkt des Kreises liegt bei $-\varrho\,\beta_0$ der ζ_1-Ebene;
2. wir haben im übrigen auf die Punkte nur die Transformation

$$z' = \zeta_1 + \varrho^2\,\beta_1\cdot\frac{1}{\zeta_1} + \varrho^3\,\beta_2\cdot\frac{1}{\zeta_1{}^2} + \ldots \quad (8)$$

anzuwenden.

Es sei noch das Folgende bemerkt. Die Transformation (5) bildet unseren Bereich in der ζ_2-Ebene auf einen Kreis um den Anfangspunkt ab; bei der darauf folgenden Spiegelung (6) würde der Koordinatenanfang der z-Ebene Mittelpunkt des entsprechenden Kreises werden. Diese Punkte fallen aber mit dem willkürlich gewählten Punkte μ der ζ-Ebene zusammen; durch das Hinzukommen des Gliedes $-\varrho\,\beta_0$ wird diese Willkürlichkeit beseitigt. Auch das expliziete Auftreten von ϱ in den endgültigen Koeffizienten war zu erwarten, denn die b_ν sind, da der gespiegelte Bereich von ϱ abhängig ist, Funktionen von ϱ.

4. Abbildung des Profilumrisses auf eine kreisähnliche Kurve. Nachdem wir in den beiden vorigen Abschnitten die Formeln für die Auftriebsresultierende und ihr Moment abgeleitet[1]) und die dabei entstehende Aufgabe der konformen Abbildung in zwei Teile zerlegt haben, kommen wir nun zu der praktischen Durchführung der ersten

[1]) Vergl. die erste Mitteilung: »Zur Theorie des Tragflächenauftriebes«, von Hrn. v. Mises a. a. O.

dieser beiden Aufgaben: der Abbildung des Profilumrisses auf eine kreisähnliche Kurve ohne Unstetigkeitsstelle.

Es lautete unsere Transformation (2), welche das Profil in der z-Ebene auf das kreisähnliche Gebiet der ζ-Ebene abbildet:

$$\left(\frac{z - \varkappa c}{z + \varkappa c}\right)^{1/\varkappa} = \frac{\zeta - c}{\zeta + c}, \qquad \text{worin} \qquad \frac{1}{\varkappa} = \frac{\pi}{2\pi - \sigma}$$

bedeutete, dieses setzen wir weiter:

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{2\pi - \sigma} = \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Die Herren v. Kármán und Trefftz[1]) haben ein mehrfach angewandtes Verfahren angegeben, daß auf der Konstruktion von Kreisscharen beruht, nach welchem man diese Transformation (2) ausführen kann. (Vergl. die Einleitung dieser Arbeit.)

Ich wählte die folgende elementare Konstruktion:

Bezeichnen wir den Bruch $\frac{z - \varkappa c}{z + \varkappa c}$ für einen Augenblick mit $\mathfrak{B}$, so wird aus der linken Seite unserer Transformation:

$$\mathfrak{B}^{1/\varkappa} = \mathfrak{B}^{1/2 + \varepsilon} = \sqrt{\mathfrak{B}} \cdot \sqrt[\eta]{\sqrt{\mathfrak{B}}},$$

es ist also gesetzt worden:

$$\eta = \frac{1}{2\,\varepsilon} = \frac{2\pi - \sigma}{\sigma}.$$

Wir geben hier eine Zusammenstellung der Werte η in Abhängigkeit von dem Spitzenwinkel σ:

σ^0	η	σ^0	η	σ^0	η	σ^0	η	σ^0	η
$^1/_2$	719	$3^1/_2$	102	$6^1/_2$	54,5	$9^1/_2$	36,9	$12^1/_2$	27,8
1	359	4	89	7	50,4	10	35	13	26,7
$1^1/_2$	239	$4^1/_2$	79	$7^1/_2$	47	$10^1/_2$	33,3	$13^1/_2$	25,7
2	179	5	71	8	44	11	31,7	14	24,7
$2^1/_2$	143	$5^1/_2$	64,5	$8^1/_2$	41,3	$11^1/_2$	30.3	$14^1/_2$	23,8
3	119	6	59	9	39	12	29	15	23

Wir werden zunächst die Quadratwurzel aus $\mathfrak{B}$ konstruieren, aus diesen Werten die η-te Wurzel ziehen, multiplizieren, um dann schließlich ζ zu suchen.

Zuerst behandeln wir also den Fall:

$$\left(\frac{z - \varkappa c}{z + \varkappa c}\right)^{1/2} = \frac{\zeta - c}{\zeta + c},$$

über den Spitzenwinkel σ und damit über $\varkappa$ sind also keine Voraussetzungen gemacht.

Wir setzen:

$$z_0 = z + \varkappa c \qquad \text{und} \qquad \zeta_0 = \zeta + c,$$

dann wird:

$$\frac{z - \varkappa c}{z + \varkappa c} = \frac{z_0 - 2\varkappa c}{z_0} = 1 - \frac{2\varkappa c}{z_0}$$

$$\frac{\zeta - c}{\zeta + c} = 1 - \frac{2c}{\zeta_0}$$

also:

$$\sqrt{1 - \frac{2\varkappa c}{z_0}} = 1 - \frac{2c}{\zeta_0}.$$

Nach dieser Formel läßt sich aus z_0 das ζ_0 mit verhältnismäßig wenig Linien graphisch finden. Zunächst muß der Punkt $2\varkappa c$ der z_0-Ebene (oder $\varkappa c$ der z-Ebene) gesucht werden; der Wert $\varkappa$ ist aus der Größe des Spitzenwinkels zu errechnen, durch Division beider Zahlen, findet man den Wert $2c$, der anderen Konstanten unserer Transformation.

Bezeichnen wir, wie üblich, die konjugiert komplexen Werte durch Ueberstreichen, so konstruieren wir zuerst den Ausdruck $\frac{2\varkappa c}{z_0}$ und setzen ihn zur Abkürzung gleich $\bar{z}$.

[1]) Vergl. ZFM. 1918 S. 111 ff.

(Vergl. Abb. 7.) Um den Radikanden auf der linken Seite zu finden, verschieben wir den Nullpunkt unseres X/Y-Koordinatensystems der z_0-Ebene in den Punkt 1/0 und drehen dort die Achsen um 180°; dieses neue System wollen wir mit X'/Y' bezeichnen. Der Punkt $\bar{z}$ in diesem System hat dann den Wert von $1 - \bar{z} = \overline{1 - z}$ im ungestrichenen (denn die Translation gibt $\bar{z} - 1$, und die Drehung ist ein Multiplizieren mit -1). Aus dem Punkte $\bar{z}$ in X'/Y' ziehen wir dann die Quadratwurzeln graphisch (in der Abb. 7 nach dem sogen. Kathetensatz), was bei einigermaßen günstiger Wahl der Einheit für $^2/_3$ aller Bildpunkte sehr bequem möglich ist. Unter den beiden Wurzeln wählt man diejenige, welche der positiven X'-Achse am nächsten liegt, so daß die Bildpunkte des Profils eine an der X'-Achse zusammenhängende Kurve bilden, deren beide Aeste sich ins Unendliche erstrecken.

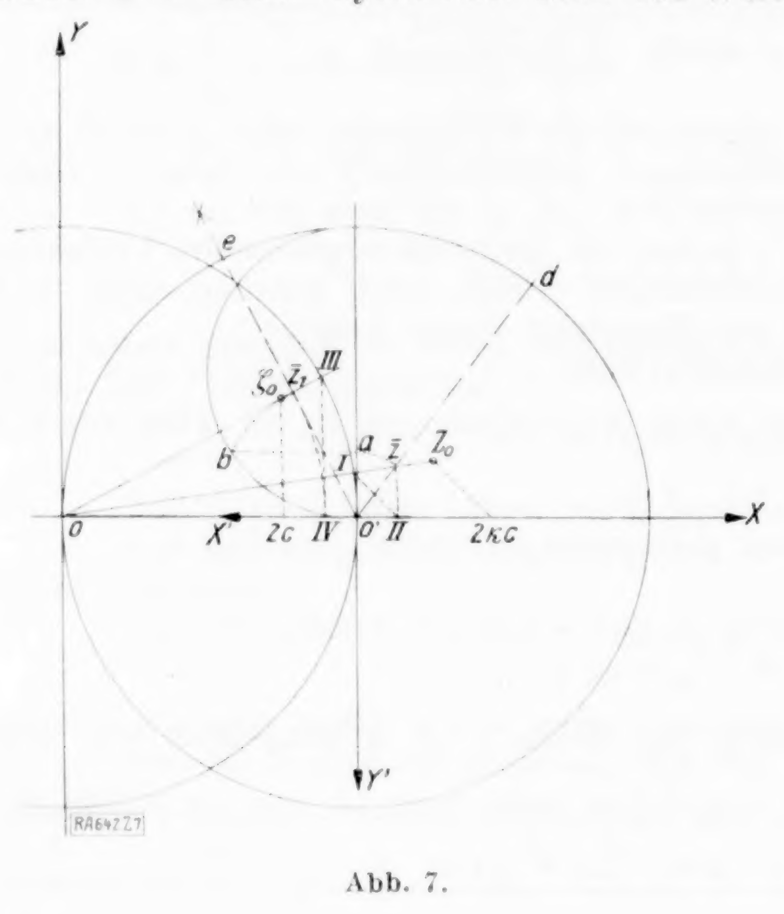


Abb. 7.

Hier ist gegebenenfalls aus den erhaltenen Punkten die η-te Wurzel zu ziehen und zu multiplizieren, was am besten rechnerisch geschieht. Die jetzt erhaltenen Punkte $\bar{z}_1$ nähern sich asymptotisch einer Geraden durch den Nullpunkt, in welche die Tangenten an die Profilspitze bei den bisherigen Operationen übergegangen sind.

Die Punkte $\bar{z}_1$ sind die konjugiert komplexen Werte von $1 - \frac{2c}{\zeta_0}$. Wir multiplizieren wieder mit -1, indem wir die Achsen um 180° drehen, subtrahieren 1, indem wir das Koordinatensystem in die alte Lage X/Y zurückverschieben, und haben in diesem System für die Punkte $\bar{z}_1$ den Wert $\frac{2c}{\zeta_0}$. Hieraus läßt sich ζ_0 finden.

Die eben erwähnte Gerade durch O' geht dabei über den Kreis durch O und $2c$ (in X/Y gemessen), der seinen Mittelpunkt auf dem Lote von O auf die erwähnte Gerade hat. Diesem Kreise schmiegen sich die Bildpunkte des hinteren Profilteiles an.

Es sind also mit den Bezeichnungen der Abb. 7 nacheinander die Punkte I, II, $\bar{z}$ $a, b, d, e, \bar{z}_1$; η-Operationen; III, IV, ζ_0 zu konstruieren.

Jetzt gehen wir zu unseren Systemen z und ζ ohne Index zurück und bemerken, daß sich die Ebenen in den Koordinatenkreuzen nicht mehr decken. Wenn wir die Lage des Kreises zum Profil in der gleichen Art, wie sie Hr. v. Mises in seiner Theorie des Tragflächenauftriebes angenommen hat, haben wollen, so müssen wir noch eine Translation vornehmen. Diese ist aber für die künftigen Abbildungsoperationen ohne Belang, ich habe sie daher in den von mir gezeichneten Beispielen nicht durchgeführt.

Betrachten wir diese jetzt erhaltene Abbildung als genügend kreisförmig, so können wir schon jetzt nach der Bemerkung in der Einleitung unsere Formeln für Auftrieb und Moment anwenden. Eine Schwierigkeit liegt hier in der richtigen Wahl von a und m. Auf diese Frage werden wir zurückkommen, wenn wir für einige Beispiele die Abbildung durchgeführt haben. Hier wollen wir noch die Größe des in den Auftriebsformeln auftretenden Koeffizienten des Gliedes $1/z$ ausrechnen.

Es war:

$$\frac{\zeta - c}{\zeta + c} = \left(\frac{z - \varkappa c}{z + \varkappa c}\right)^{1/\varkappa}$$

gesetzt worden; daraus folgt:

$$\zeta = z + \frac{1 - \varkappa^2}{3} \cdot \frac{c^2}{z} + \dots\dots$$

Das c_1 unserer Formeln ist also zu berechnen aus:

$$-c_1^2 \cdot e^{2\gamma i} = \frac{1-\varkappa^2}{3} \cdot c^2.$$

Da in diesem Fall der Koeffizient reell ist, wird $\gamma = 0$, die Richtung der »Zweiten Achse des Profils« wird also die Richtung der x-Achse.

5. Abbildung des kreisähnlichen Gebietes auf einen Kreis. Wir kommen nun zur praktischen Durchführung des zweiten Teiles unserer konformen Abbildung.

Wir bestimmen zunächst nach der früher gegebenen Vorschrift den Radius ϱ und den Mittelpunkt μ des Kreises, an dem wir unser Gebiet spiegeln wollen und führen die Transformation (3) (Verschieben des Koordinatenanfangspunktes) durch.

Nach dem oben Gesagten werden die beiden Spiegelungen (4) und (6) mit der Berechnung der Koeffizienten von (5) verbunden. Um den Kreis zum Schluß wirklich zu zeichnen, benutzt man die Koeffizienten der Entwicklung (8) für z' und erhält auf diese Weise gleichzeitig die Möglichkeit, die Güte der Kreisabbildung zu beurteilen.

Aus dem Satze des Hrn. Bieberbach erkennt man, daß es für die Durchführung von (5) zunächst darauf ankommt, die Integrale:

$$z_{\mu\nu} = \int\limits_{\mathfrak{B}} z^\mu \cdot \bar{z}^\nu \cdot d\,\omega$$

zu berechnen, wo $\mathfrak{B}$ unser kreisähnliches Gebiet in der ζ_2-Ebene ist; dem Kreis mit den Radius ϱ entspricht hier also der Einheitskreis. Ich nehme den Buchstaben z als Integrations-Variable, um nicht durch dreifache Indizes $\zeta_{2\mu\nu}$ die Uebersichtlichkeit zu stören. Setzt man

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

dann wird:

$$z_{\mu\nu} = \int\limits_{\mathfrak{B}} r^{\mu+\nu} \cdot e^{(\mu-\nu)\varphi i}\, d\,\omega.$$

Jetzt zerlegen wir den Bereich $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{K} + \mathfrak{S}$ (vgl. Abb. 8), wo $\mathfrak{K}$ der Einheitskreis und $\mathfrak{S}$ der Rest ist; $\mathfrak{S}$ ist dabei positiv oder negativ zu nehmen. Dann wird:

$$z_{\mu\nu} = \int\limits_{\mathfrak{B}} = \int\limits_{\mathfrak{K}} + \int\limits_{\mathfrak{S}}.$$

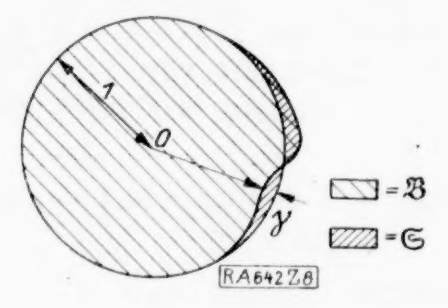


Abb. 8.

Wir betrachten zuerst die $\int\limits_{\mathfrak{K}}$:

für $\mu \neq \nu$
$$\int\limits_{\mathfrak{K}} r^{\mu+\nu} e^{(\mu-\nu)\varphi i}\, d\,\omega = 0,$$

für $\mu = \nu$
$$\int\limits_{\mathfrak{K}} r^{2\mu}\, d\,\omega = \int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi \int\limits_0^1 r^{2\mu+1}\, d\,r = 2\,\pi \cdot \frac{1}{2\mu+2},$$

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} r^{2\mu}\, d\,\omega = \frac{\pi}{\mu+1}.$$

Weiter wird

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} r^{\mu+\nu} e^{(\mu-\nu)\varphi i}\, d\,\omega = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^{1+\gamma} r^{\mu+\nu+1} e^{(\mu-\nu)\varphi i}\, d\,r\, d\,\varphi.$$

Hierbei bedeutet γ (vgl. Abb. 8) den positiv oder negativ zu nehmenden Abstand der Kreisperipherie vom Bereichrande, gemessen auf dem zugehörigen Radius, positiv oder negativ, je nachdem der Rand von $\mathfrak{B}$ an der betreffenden Stelle außerhalb oder innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegt.

Den Wert γ erhält man dabei folgendermaßen aus dem zeichnerisch gegebenen Gebiete in der ζ_1-Ebene.

Durch die Transformation (4) wird aus $\varrho + \beta$ ($\beta \gtreqless 0$ ist der der Größe γ entsprechende Abstand in der ζ_1-Ebene):

$$\frac{\varrho}{\varrho + \beta} = 1 + \gamma, \quad \gamma = -\frac{1}{1 + \varrho/\beta}.$$

Integrieren wir nach r, so erhalten wir:

$$\int_{\mathfrak{S}} = \int_0^{2\pi} e^{(\mu - \nu)\varphi i} \cdot [(1+\gamma)^{\mu+\nu+2} - 1] \cdot \frac{d\varphi}{\mu + \nu + 2},$$

$$\int_{\mathfrak{S}} = \int_0^{2\pi} e^{(\mu - \nu)\varphi i} \cdot [\gamma + \frac{\mu + \nu + 1}{2}\gamma^2 + \ldots\ldots] \, d\varphi.$$

Vernachlässigen wir die höheren Potenzen von γ, so erhalten wir schließlich:

$$\int_{\mathfrak{S}} = \int_0^{2\pi} \gamma \cdot \cos(\mu - \nu)\,\varphi\, d\varphi + i \int_0^{2\pi} \gamma \sin(\mu - \nu)\,\varphi\, d\varphi$$
$$+ \frac{\mu + \nu + 1}{2} \int \gamma^2 \cos(\mu - \nu)\,\varphi\, d\varphi + i \cdot \frac{\nu + \mu + 1}{2} \int \gamma^2 \sin(\mu - \nu)\,\varphi \cdot d\varphi.$$

Die auftretenden vier Integrale haben die Form von Fourier-Koeffizienten; zu ihrer zahlenmäßigen Ermittlung bediente ich mich der von Hrn. v. Mises in seinen Vorlesungen vorgetragenen graphischen Methode[1]).

Für diese Integrationen sei noch auf das Folgende hingewiesen:

Durch die Spieglung (4) wird

$$\arg \zeta_2 = -\arg \zeta_1.$$

Man trägt dem am einfachsten Rechnung, indem man beim Zeichnen der Kurven γ und γ^2 die Funktionswerte entsprechend dem negativen Umdrehungssinn aufträgt. Zur Herstellung dieser Kurven $\gamma(\varphi)$ und $\gamma^2(\varphi)$ empfiehlt es sich, erst Kurven zu zeichnen, welche γ und γ^2 in Abhängigkeit von dem Abstande β darstellen, so daß zu jedem Werte β der zugehörige γ-Wert mit dem Zirkel abgegriffen werden kann (Millimeterpapier). Wegen der Kleinheit von γ^2 habe ich diese Werte in zehnfachem Maßstabe aufgetragen.

Setzen wir alles ein, so erhalten wir als Ergebnis der Integration:

für $\mu \neq \nu$
$$z_{\mu\nu} = \int_0^{2\pi} \gamma \cdot \cos(\mu - \nu)\,\varphi\, d\varphi + \frac{\mu + \nu + 1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma^2 \cos(\mu - \nu)\,\varphi\, d\varphi$$
$$+ i \cdot \left(\int_0^{2\pi} \gamma \sin(\mu - \nu)\,\varphi\, d\varphi + \frac{\mu + \nu + 1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma^2 \sin(\mu - \nu)\,\varphi\, d\varphi \right),$$

für $\mu = \nu$
$$z_{\mu\mu} = \frac{\pi}{\mu + 1} + \int_0^{2\pi} \gamma\, d\varphi + \frac{2\mu + 1}{2} \int_0^{2\pi} \gamma^2\, d\varphi.$$

Wir kommen nun zu der Bestimmung der Koeffizienten b_ν. Wir setzen in den Gleichungen von S. 271:

$$z_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} + i\,\eta_{\mu\nu}, \qquad b_\nu = \varphi_\nu + i\,\psi_\nu.$$

Beachten wir, daß auf Grund der sin- und cos-Darstellung:

$$\xi_{\mu\nu} = \xi_{\nu\mu}, \qquad \eta_{\mu\nu} = -\eta_{\nu\mu}, \qquad \eta_{\mu\mu} = 0$$

ist, und trennen wir das Reelle vom Imaginären, so erhalten wir zur Bestimmung der ersten drei dieser Koeffizienten die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\xi_{01} + 2\,\xi_{11}\,\varphi_2 + 3\,\xi_{12}\,\varphi_3 + 3\,\eta_{12}\,\psi_3 + 4\,\xi_{13}\,\varphi_4 + 4\,\eta_{13}\,\psi_4 = 0,\\
&\eta_{01} + 2\,\xi_{11}\,\psi_2 - 3\,\eta_{12}\,\varphi_3 + 3\,\xi_{12}\,\psi_3 - 4\,\eta_{13}\,\varphi_4 + 4\,\xi_{13}\,\psi_4 = 0,\\
&\xi_{02} + 2\,\xi_{12}\,\varphi_2 - 2\,\eta_{12}\,\psi_2 + 3\,\xi_{22}\,\varphi_3 + 4\,\xi_{23}\,\varphi_4 + 4\,\eta_{23}\,\psi_4 = 0,\\
&\eta_{02} + 2\,\eta_{12}\,\varphi_2 + 2\,\xi_{12}\,\psi_2 + 3\,\xi_{22}\,\psi_3 - 4\,\eta_{23}\,\varphi_4 + 4\,\xi_{23}\,\psi_4 = 0,\\
&\xi_{03} + 2\,\xi_{13}\,\varphi_2 - 2\,\eta_{13}\,\psi_2 + 3\,\xi_{23}\,\varphi_3 - 3\,\eta_{23}\,\psi_3 + 4\,\xi_{33}\,\varphi_4 = 0,\\
&\eta_{03} + 2\,\eta_{13}\,\varphi_2 + 2\,\xi_{13}\,\psi_2 + 3\,\eta_{23}\,\varphi_3 + 3\,\xi_{23}\,\psi_3 + 4\,\xi_{33}\,\psi_4 = 0.
\end{aligned}$$

1) Vgl. diese Zeitschrift Bd. II, S. 113 ff.

Dieses System ist in Bezug auf die durch ν dividierten Koeffizienten von φ_ν und ψ_ν symmetrisch. Wir eliminieren zunächst φ_4 und ψ_4, indem wir die erste Gleichung mit ξ_{33}, die fünfte mit $-\xi_{13}$, die sechste mit $-\eta_{13}$ multiplizieren und dann die drei Gleichungen addieren, darauf die zweite Gleichung mit ξ_{33} multiplizieren und so fort, nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & \xi_{33} & & & \\
2 & & \xi_{33} & & \\
3 & & & \xi_{33} & \\
4 & & & & \xi_{33} \\
5 & -\xi_{13} & \eta_{13} & -\xi_{23} & \eta_{23} \\
6 & -\eta_{13} & -\xi_{13} & -\eta_{23} & -\xi_{23}.
\end{array}$$

Wir erhalten dabei vier Gleichungen von der folgenden Form:

$$\begin{array}{l|cccc}
c_1 + 2\alpha\varphi_2 \qquad\qquad + 3\gamma\varphi_3 + 3\delta\psi_3 = 0 & \beta & & -\gamma & -\delta \\
c_2 \qquad + 2\alpha\psi_2 - 3\delta\varphi_3 + 3\gamma\psi_3 = 0 & & \beta & \delta & -\gamma \\
c_3 + 2\gamma\varphi_2 - 2\delta\psi_2 + 3\beta\varphi_3 \qquad\qquad = 0 & -\gamma & \delta & \alpha & \\
c_4 + 2\delta\varphi_2 + 2\gamma\psi_2 \qquad\qquad + 3\beta\psi_3 = 0 & -\delta & -\gamma & & \alpha.
\end{array}$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \xi_{01}\,\xi_{33} - \xi_{03}\,\xi_{13} - \eta_{03}\,\eta_{13}, & \alpha &= \xi_{11}\,\xi_{33} - \xi_{13}{}^2 - \eta_{13}{}^2 \\
c_2 &= \eta_{01}\,\xi_{33} + \xi_{03}\,\eta_{13} - \eta_{03}\,\xi_{13}, & \beta &= \xi_{22}\,\xi_{33} - \xi_{23}{}^2 - \eta_{23}{}^2 \\
c_3 &= \xi_{02}\,\xi_{33} - \xi_{03}\,\xi_{23} - \eta_{03}\,\eta_{23}, & \gamma &= \xi_{12}\,\xi_{33} - \xi_{23}\,\xi_{13} - \eta_{23}\,\eta_{13} \\
c_4 &= \eta_{02}\,\xi_{33} + \xi_{03}\,\eta_{23} - \eta_{03}\,\xi_{23}, & \delta &= \eta_{12}\,\xi_{33} + \eta_{23}\,\xi_{13} - \xi_{23}\,\eta_{13}.
\end{aligned}$$

In bezug auf die durch ν dividierten Koeffizienten von φ_ν und ψ_ν ist auch dieses System symmetrisch; es sei noch bemerkt, daß es von derselben Form ist, wie das, welches wir brauchen, um lediglich die Zahlen b_2 und b_3 zu berechnen. Es läßt sich sehr einfach in ein solches umformen, daß in jeder Gleichung nur eine Unbekannte vorkommt. Wir multiplizieren dazu die Gleichungen nach dem danebenstehenden Schema und addieren, dann erhalten wir vier Gleichungen von der Form:

$$Z_{2\nu-3} + \nu\,\varphi_\nu \cdot N = 0 \qquad \text{und} \qquad Z_{2(\nu-1)} + \nu\,\psi_\nu \cdot N = 0.$$

Hierbei ist:

$$Z_1 = c_1\beta - c_3\gamma - c_4\delta, \qquad Z_2 = c_2\beta + c_3\delta - c_4\gamma, \qquad Z_3 = -c_1\gamma + c_2\delta + c_3\alpha$$

$$Z_4 = -c_1\delta - c_2\gamma + c_4\alpha, \qquad N = \alpha\beta - \gamma^2 - \delta^2.$$

Sind b_2 und b_3 bestimmt, so lassen sich φ_4 und ψ_4 aus den beiden letzten Gleichungen des Ausgangssystems errechnen.

Die Berechnung weiterer Koeffizienten erledigt sich auf ähnliche Art; es sind der Reihe nach $b_n, b_{n-1} \ldots$ zu eliminieren, wobei darauf zu achten ist, daß die Symmetrie der durch ν dividierten Koeffizienten von φ_ν und ψ_ν erhalten bleibt.

6. Die in den Formeln auftretenden Bestimmungsstücke. Wir haben in den vorigen Abschnitten zunächst die Abbildung des Profils auf ein kreisähnliches Gebilde, dann dessen Abbildung auf einen Kreis, beidemal unter Erhaltung des Unendlichfernen, erledigt. Wir hatten bei der ersteren eine Figur in der ζ-Ebene erhalten und waren bei der zweiten von dieser selben Figur — aber in der ζ_1-Ebene — ausgegangen. Es ist jetzt unsere Aufgabe, den Uebergang zwischen beiden herzustellen und die in den Formeln für c_a und c_m vorkommenden Bestimmungsstücke in ihrer endgültigen Form anzugeben.

Daß sich die ζ- und die z-Ebene in ihren Koordinatenkreuzen nicht decken, ist ohne Belang; der Nullpunkt der ζ-Ebene liegt bei

$$c \cdot (1 - \varkappa)$$

der z-Ebene (in den Abbildungen mit c bezeichnet).

Führen wir ζ in die Transformation (7) ein, so erhalten wir:

$$z' = \zeta - \mu + \varrho\,\beta_0 + \varrho^2\,\beta_1 \cdot \frac{1}{\zeta - \mu} + \ldots$$

Der Mittelpunkt liegt also bei:

$$m = |m| \cdot e^{\delta i} = \mu - \varrho\,\beta_0$$

der ζ-Ebene, wo μ die in der ζ-Ebene gemessene komplexe Koordinate des Mittelpunktes vom Spiegelungskreise ist.

Der in den Formeln für c_m auftretende Koeffizient des Gliedes $1/z$ ist zu berechnen; es wird:

$$\frac{1}{\zeta - \mu} = \frac{1}{\zeta} \cdot \left[1 + \frac{\mu}{\zeta} + \left(\frac{\mu}{\zeta}\right)^2 + \ldots . \right],$$

d. h. der verlangte Koeffizient von $1/\zeta$ ist gleich dem in unserer Transformation (8):

$$\varrho^2 \cdot \beta_1 .$$

Wir haben also:

$$z' = \zeta + \varrho^2 \cdot \beta_1 \frac{1}{\zeta} + \ldots .$$

Hierin ist für ζ der am Schluß des Abschn. **4.** errechnete Wert einzusetzen:

$$\zeta = z + \frac{1 - \varkappa^2}{3} \cdot c^2 \cdot \frac{1}{z} + \ldots$$

Die Rechnung ergibt:

$$z' = z + \left(\varrho^2 \beta + \frac{1 - \varkappa^2}{3} c^2\right) \cdot \frac{1}{z} + \ldots$$

Setzen wir in die Formeln die Werte für β_0 und β_1 ein, so erhalten wir:

$$|m| \cdot e^{\delta i} = \mu + \varrho\, b_2 , \qquad a_1 = -c_1{}^2 \cdot e^{2\gamma i} = -\left[\varrho^2 \cdot (b_3 - b_2{}^2) + \frac{\varkappa^2 - 1}{3} \cdot c^2\right].$$

Schwieriger gestaltet sich die Bestimmung des Bildkreisradius a und des durch den Staupunkt bestimmten Winkels β, weil wir dabei Schätzungen zu Hilfe nehmen müssen.

Bei den drei von mir durchgerechneten Beispielen (Göttinger Ergebnisse, Profil Nr. 399, 404 und 432) bestimmte ich die beiden ersten Koeffizienten der Reihe (8); die dabei auftretenden Verschiebungen waren ihrem absoluten Betrage nach:

Bei Profil Nr.	$\left\lvert \varrho^2 \beta_1 \cdot \frac{1}{\zeta_1} \right\rvert$	$\left\lvert \varrho^3 \beta_2 \cdot \frac{1}{\zeta_1{}^2} \right\rvert$
399	1,3 bis 1,1	0,44 bis 0,32
404	3 » 2,4	1 » 0,7
432	0,95 » 0,82	0,20 » 0,15

in mm gemessen unter den im nächsten Abschnitt angegebenen Größen- und Maßstabs-Verhältnissen (vergl. die Abb. 9, 10 und 11). Die Hinzunahme weiterer Koeffizienten hätte beim Profil 399 und 432 keine zeichnerisch verwertbaren Ergebnisse mehr geliefert;

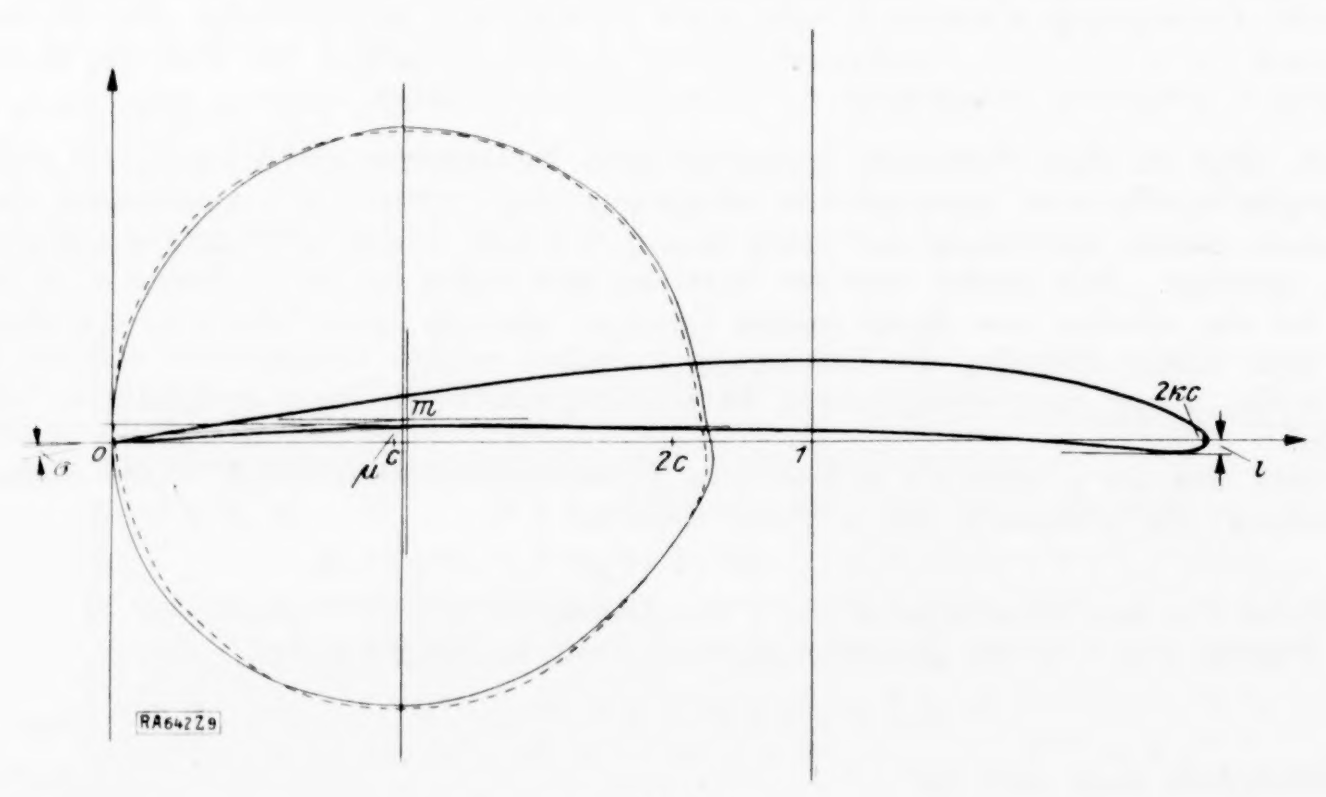


Abb. 9.

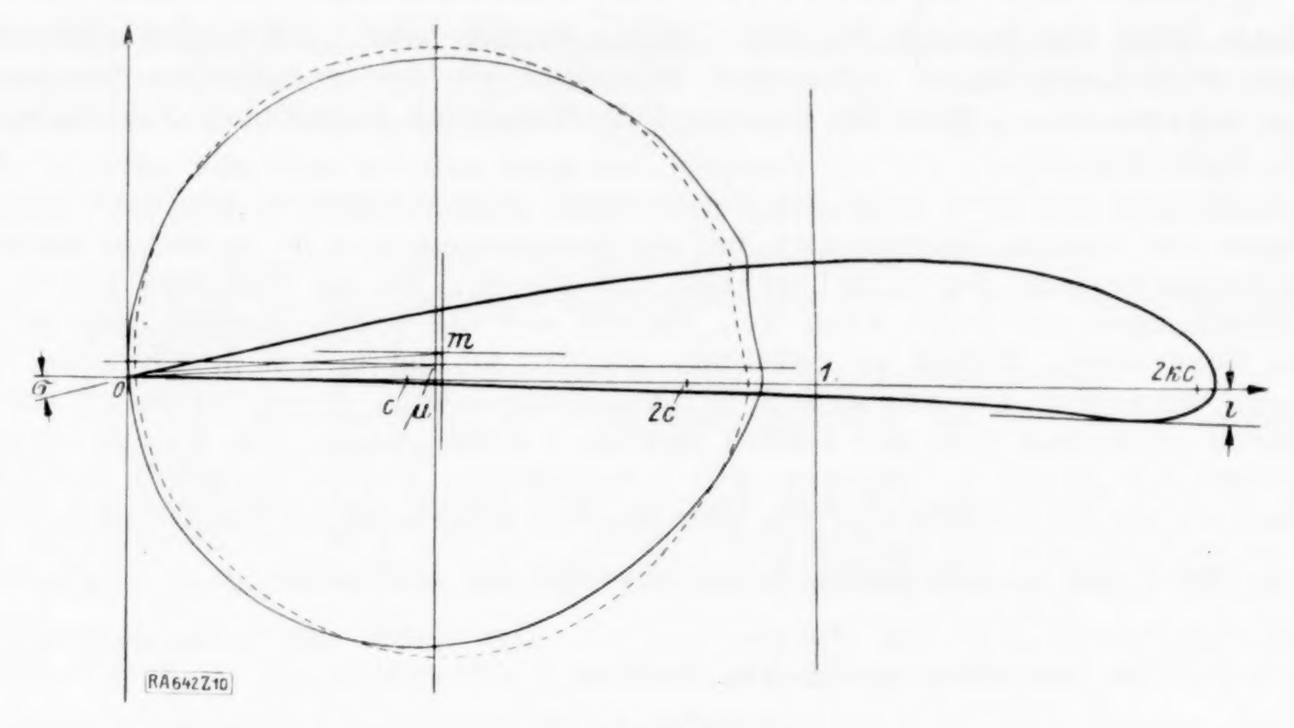


Abb. 10.

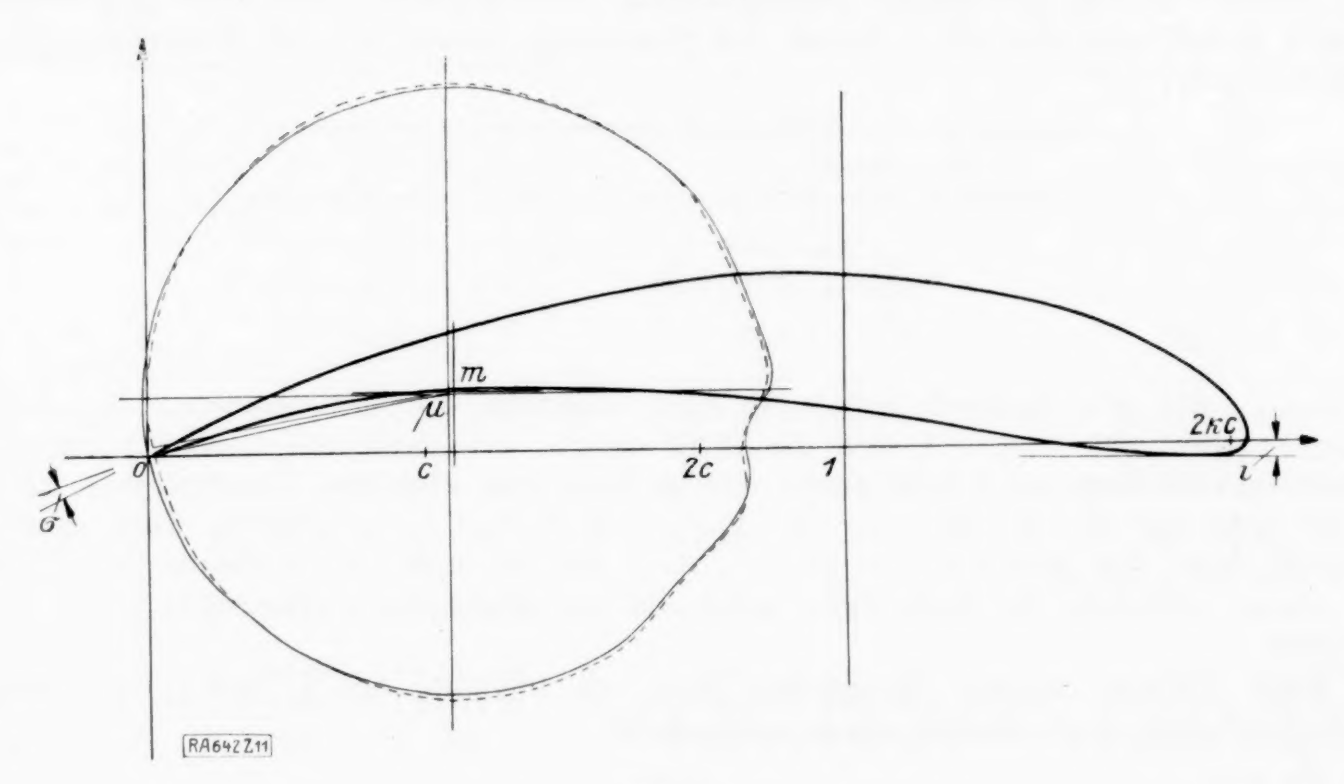


Abb. 11.

durch diese Verschiebungen ist die mehr oder minder elliptische Form der Bildbereiche in eine sehr gut kreisförmige verwandelt worden, die Ausbeulungen und Einbuchtungen, die den Profilköpfen entsprechen, sind schwächer geworden, wenn auch nicht verschwunden.

Ungefähr $^3/_4$ des Bereichrandes läßt sich durch einen Kreisbogen um den schon bestimmten Mittelpunkt m gut approximieren. Den Radius dieses Kreisbogens wählen wir als Bildkreisradius a, zu seiner Bestimmung diene noch das folgende: auf Grund der aus der Arbeit des Hrn. Bieberbach[1]) folgenden Minimaleigenschaft der Bildkreise ergibt sich für uns wegen der Spiegelung, daß die einzelnen Glieder der Reihe (8) den Bildbereich in der z'-Ebene nie verkleinern: es ist also darauf zu achten, daß πa^2 nicht kleiner ist als das Gebiet in der z'-Ebene.

Noch unsicherer läßt sich theoretisch der endgültige Bildpunkt der Profilspitze angeben. Für die maximale Verschiebung, die ein Punkt erleiden kann, gibt Hr. Bieberbach[2]) eine Abschätzung, nach welcher für uns bei

$$\varepsilon = 0{,}05\,, \qquad |z' - z| < {}^2/_3\,\pi$$

wird. Andererseits aber zeigt eine Betrachtung der Figuren, daß der Bildpunkt doch in

[1]) Vergl. Rendiconti s. o.

[2]) Vergl. Sitzungsberichte s. o.

der nächsten Nähe des Punktes $-c$ der ζ-Ebene bleiben wird. Ich habe daher den durch die ersten zwei Koeffizienten erhaltenen Bildpunkt als den endgültigen Staupunkt am Bildkreise angenommen. Eine für unseren Fall tatsächlich brauchbare Fehlergrenze läßt sich z. Z. nicht angeben.

Desgleichen läßt sich auch der Fehler nicht genau angeben, den man durch Vernachlässigen der höheren Koeffizienten bei der Bestimmung von b_2, b_3 und b_4 macht. Aus den Gleichungssystemen der S. 271 erhellt, daß die $z_{\mu\nu}$, die als Faktoren von b_5, $b_6 \ldots$ in den Gleichungen auftreten, auch von Einfluß auf die ersten Koeffizienten sind. Um ein Urteil über diesen Einfluß zu gewinnen, wurden b_2 und b_3 aus dem System von vier Gleichungen berechnet, das aus dem S. 276 hingeschriebenen durch Fortlassen der dritten und sechsten Gleichung und der letzten Spalten erhalten wird. Die daraus errechneten Koeffizienten der Reihe (8) ergaben nur Unterschiede, welche innerhalb der Zeichengenauigkeit liegen: die Koordinaten des Mittelpunktes differierten im Höchstfall um $^1/_{20}$ mm, die durch das Glied $\frac{1}{\zeta}$ bewirkten Verschiebungen im Höchstfall um $^1/_{10}$ mm, und die Winkelargumente von $\varrho^2 \beta_1$ um weniger als 1^0. Der durch die Vernachlässigung entstehende Fehler ist also ohne merklichen Einfluß.

Wir wollen jetzt noch kurz auf die Wahl des Bildkreises eingehen, wenn man die durch unsere im **4.** Abschnitt durchgeführte Konstruktion erhaltene Abbildung als genügend kreisförmig ansieht. Durch die Rechnung erhielt ich als Korrektionsglied für den Mittelpunkt:

Bei Profil	$+\varrho b_2$ in mm
399	$1{,}14 + i \cdot 1{,}82$
404	$1{,}46 + i \cdot 2{,}58$
432	$1{,}16 + i \cdot 0{,}14$

Die Punkte, die wir dadurch erhalten, sind ungefähr die Schwerpunkte der Bereiche. Bei den Profilen 399 und 404 sind die Bildbereiche von mehr elliptischer Form und der neue Mittelpunkt liegt im Schnittpunkt der größten und kleinsten Durchmesser. Als Bildkreis ist also der zu wählen, der die Figur am besten approximiert, über den Radius gilt dabei hier das gleiche wie oben. Man könnte wohl auch diesen Kreis als den Kreis $\{\mu, \varrho\}$ wählen, es wird dann aber die zeichnerische Uebertragung der Werte γ ungenauer.

Zum Schlusse dieses Abschnittes seien die Formeln für c_a und c_m mit ihren Bestimmungsstücken noch einmal zusammengestellt.

Es war:

$$c_a = 8 \cdot \pi \frac{a}{t} \cdot \sin(\alpha + \iota + \beta)$$

$$c_{m2} = \frac{c_a}{t} \cdot [b \cdot \cos(\alpha + \iota) - |m| \cdot \cos(\alpha + i + \delta)] - 4\pi \frac{c_1^2}{t^2} \cdot \sin 2(\alpha + \iota + \gamma)$$

hierin war:

c_a die Auftriebszahl,
c_{m2} die Momentenzahl für das Auftriebsmoment um den vordersten Profilpunkt,
t die Länge des Profils,
b der Abstand des Profilkopfes vom Nullpunkt,
ι der Winkel zwischen der x-Achse und der Profilsehne,
β der Winkel zwischen der x-Achse und der Verbindungslinie des Bildpunktes der Profilspitze mit dem Kreismittelpunkt,

c_1, m, γ, δ waren bestimmt durch:

$$-c_1^2 \cdot e^{2\gamma i} = -\left[\varrho^2 \cdot (b_3 - b_2^2) + \frac{\varkappa^2 - 1}{3} \cdot c^2\right]$$

$$|m| \cdot e^{\delta i} = \mu + \varrho\, b_2,$$

α ist der variable Anstellwinkel.

7. Die Ergebnisse der Zeichnungen und Rechnungen. Nach der in den vorstehenden Abschnitten entwickelten Methode wurden die Profile Nr 399, 404 und 432 aus »Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen«[1]) untersucht.

Es wurden alle drei auf den doppelten Maßstab der Zeichnungen in den »Göttinger Ergebnissen« vergrößert. Als Einheit wählte ich 150 mm.

Ueber die Wahl der Punkte $2\varkappa c$ ist in einzelnen zu bemerken:

- bei Profil 399 wurden nach Möglichkeit die für die Wahl von $2\varkappa c$ gemachten Regeln beachtet;
- bei Profil 404 wurde $2\varkappa c$ etwa $^1/_2$ bis 1 mm zu tief links,
- bei Profil 432 etwa $^1/_2$ zu hoch links gewählt, um die Einflüsse dieser Annahmen zu prüfen.

Auf die Wahl zu weit links, d. h. zu weit vom Profilkopf entfernt, ist die Einbeulung zurückzuführen. Wie weit ein geringes Verschieben des Punktes $2\varkappa c$ sonst noch auf die Gestalt des Bildbereiches von Einfluß ist, läßt sich aus diesen Beispielen nicht entnehmen.

Die Abb. 9, 10, 11 zeigen die Ergebnisse der Konstruktionen.

Im einzelnen erhielt ich die folgenden Zahlenwerte:

	399	404	432
σ	8^0	14^0	8^0
$\varkappa$	$1{,}95_6$	$1{,}92_2$	$1{,}95_6$
η	44	24,7	44
$2\varkappa c$	235,3 mm	234,3 mm	232,5 mm
c	$60{,}2$ mm $= 0{,}401_3\ E$	$61{,}0$ mm $= 0{,}406_7\ E$	$59{,}4_5$ mm $= 0{,}396_3\ E$
$\frac{\varkappa^2-1}{3}\cdot c^2$	$0{,}1516_4$	$0{,}1485_1$	$0{,}1478_9$
ϱ	62 mm $= 0{,}413\ E$	66 mm $= 0{,}44\ E$	66 mm $= 0{,}44\ E$
μ	$2{,}1 + i\,3{,}3$ mm	$5{,}4 + i\,3{,}7$ mm	$5{,}2 + i\,13{,}1$ mm
	$0{,}014 + i\,0{,}022\ E$	$0{,}036 + i\,0{,}024_7\ E$	$0{,}034_7 + i\,0{,}087_3\ E$
b_2	$+ 0{,}01839 + i\,0{,}02928$	$+ 0{,}02217 + i\,0{,}03905$	$+ 0{,}01761 + i\,0{,}00205$
b_3	$+ 0{,}00979 + i\,0{,}01755$	$+ 0{,}02891 + i\,0{,}02718$	$+ 0{,}01210 + i\,0{,}00656$
b_4	$+ 0{,}00197 - i\,0{,}00450$	$+ 0{,}01044 + i\,0{,}00963$	$- 0{,}00104 + i\,0{,}00261$
β_0	$- 0{,}01839 - i\,0{,}02928$	$- 0{,}02217 - i\,0{,}03905$	$- 0{,}01761 - i\,0{,}00205$
β_1	$- 0{,}01031 - i\,0{,}01647$	$- 0{,}02994 - i\,0{,}02545$	$- 0{,}01179 - i\,0{,}00649$
β_2	$- 0{,}00260 + i\,0{,}00572$	$- 0{,}01119 - i\,0{,}00616$	$+ 0{,}00143 - i\,0{,}00233$
$\varrho\,\beta_0$	$- 0{,}00760 - i\,0{,}01210$	$- 0{,}00975 - i\,0{,}001718$	$- 0{,}00775 - i\,0{,}00090$
	$- 1{,}14 - i\,1{,}82$ mm	$- 1{,}46 - i\,2{,}58$ mm	$- 1{,}16 - i\,0{,}14$ mm
$\varrho^2\,\beta_1$	$+ 0{,}00332 \cdot e^{i\cdot 238^0}$	$+ 0{,}00761 \cdot e^{i\,220{,}4^0}$	$+ 0{,}00261 \cdot e^{i\,208\,8^0}$
$\varrho^3\,\beta_2$	$+ 0{,}00044 \cdot e^{i\,114{,}5^0}$	$+ 0{,}00109 \cdot e^{i\,208{,}8^0}$	$+ 0{,}00023 \cdot e^{i\,301{,}5^0}$
a	63 mm $= 0{,}42\ E$	66,6 mm $= 0{,}444\ E$	66,3 mm $= 0{,}442\ E$
$m =$	$+ 0{,}02160 + i\,0{,}03410$	$+ 0{,}04575 + i\,0{,}04185$	$+ 0{,}04242 + i\,0{,}08823$
$\lvert m\rvert \cdot e^{i\,\delta}$	$+ 0{,}04037 \cdot e^{i\,57{,}7^0}$	$+ 0{,}06200 \cdot e^{i\,42{,}5^0}$	$+ 0{,}09790 \cdot e^{i\,64{,}3^0}$
$- c_1{}^2 \cdot e^{2\gamma i}$	$- 0{,}153425 \cdot e^{i\cdot 1^0}$	$- 0{,}15439 \cdot e^{i\cdot 1{,}8^0}$	$- 0{,}150175 \cdot e^{i\cdot 0{,}5^0}$
b	0,7907	0,809	0,805
t	1,575	1,59	1,58
β vor und nach	$3{,}0^0$	$3{,}0^0$	$11{,}1^0$
β der Abb.	$3{,}5^0$	4.5^0	$10{,}9^0$
ι	$1{,}1^0$	$2{,}0^0$	$1{,}0^0$

Der Vergleich der Zahlen a mit ϱ, m mit μ, $\frac{\varkappa^2-1}{3}c^2$ mit $c_1{}^2 \cdot e^{2\gamma i}$ und β vor und nach der Abbildung des kreisähnlichen Gebietes zeigt den Einfluß dieser Abbildung auf die Bestimmungsstücke in den Formeln.

[1]) 1921 bei R. Oldenbourg erschienen.

Ich erhielt mit diesen Zahlen folgende Werte für c_a und c_{m_2}:

Profil	399		404		432	
α	c_a	c_{m_2}	c_a	c_{m_2}	c_a	c_{m_2}
− 9	− 0,5142	− 0,0492	− 0,3061	+ 0,0173	+ 0,372	+ 0,3771
− 6	− 0,1637	+ 0,0395	+ 0,0612	+ 0,1121	+ 0,757	+ 0,4649
− 3	+ 0,1871	+ 0,1292	+ 0,4284	+ 0,2082	+ 1,139	+ 0,5934
0	+ 0,5375	+ 0,2191	+ 0,7945	+ 0,3043	+ 1,518	+ 0,7010
+ 3	+ 0,8864	+ 0,3089	+ 1,1583	+ 0,3997	+ 1,893	+ 0,8070
+ 6	+ 1,2329	+ 0,3958	+ 1,5190	+ 0,4930	+ 2,263	+ 0,9100
+ 9	+ 1,5759	+ 0,4826	+ 1,8755	+ 0,5835	+ 2,626	+ 1,0091

Um diese Werte mit den in den »Göttinger Ergebnissen« angegebenen Werten:

$$C_a = 100\ c_a \qquad C_m = 100\ c_m$$

vergleichen zu können, müssen wir sie auf das gleiche Tragflächenseitenverhältnis 1 : 5 umrechnen, das die gemessenen Modelle hatten; denn die Theorie der ebenen klassischen Hydromechanik setzt voraus, daß ein Ausgleich des Druckes über die seitlichen Flügelenden nicht stattfindet. Die zur Umrechnung benutzte Formel lautet:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{F_1}{b_1^2} - \frac{F_2}{b_2^2}\right).$$

Hierin sind die α_ν die zu dem betreffenden c_a gehörenden Anstellwinkel, F_ν der Flächeninhalt der senkrechten Projektion der tragenden Fläche auf die Ebene, welche die Profilsehne und die Flügelhinterkante enthält, und b_ν die Spannweite. Für Flügel mit rechteckigem Grundriß ist:

$$F_\nu = t_\nu \cdot b_\nu \qquad \text{oder} \qquad \frac{F_\nu}{b_\nu^{\,2}} = \frac{t_\nu}{b_\nu}.$$

Dies ist gerade das Tragflächenseitenverhältnis.

Setzen wir die Zahlenwerte $^1/_\infty$ und $^1/_5$ in die Formel ein und gehen bei den Anstellwinkeln vom Bogen- zum Gradmaß über, so erhalten wir:

$$\alpha_1{}^0 - \alpha_2{}^0 = -\frac{36}{\pi^2} \cdot c_a \sim -3{,}65\ c_a.$$

Die Abb. 9a, 10a, 11a zeigen neben den im Windkanal gemessenen Werten für die Auftriebszahl in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α die errechneten, und zwar sowohl die für das Seitenverhältnis $1 : \infty$ als auch für das 1 : 5. Die theoretischen Zahlen liegen jedesmal annähernd auf einer Geraden. Bemerkt sei noch, daß der in der Formel für c_a vorkommende Winkel $\alpha + \iota + \beta$ von wesentlich höherem Einfluß ist auf das Ergebnis

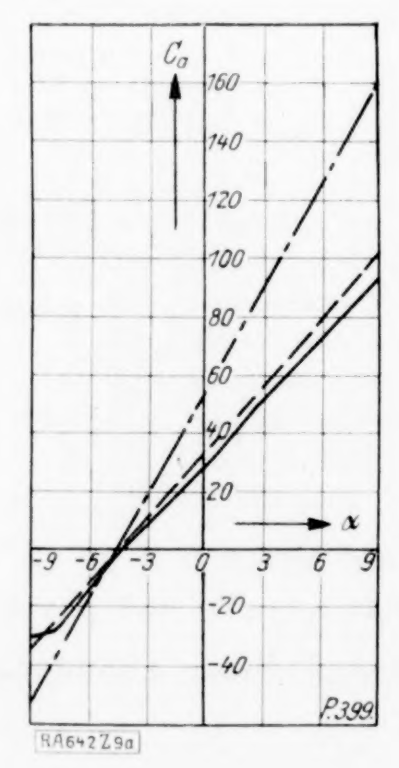


Abb. 9a.

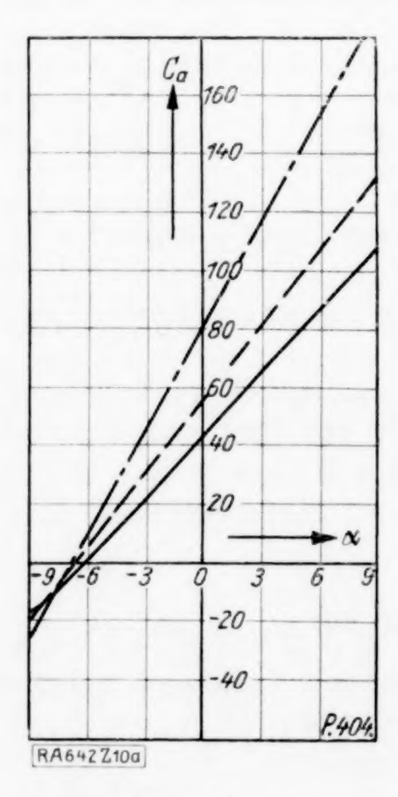


Abb. 10a.

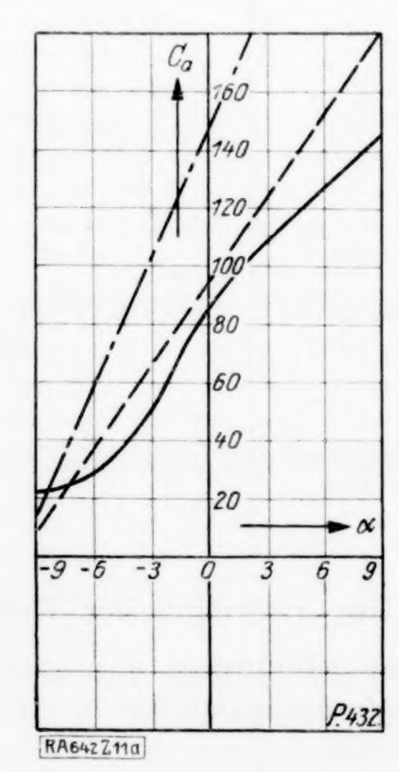


Abb. 11a.

als der Faktor $8\,\pi\,\frac{a}{t}$. Denn wegen der Kleinheit der Winkel können wir uns den sin durch den Bogen ersetzt denken und erhalten dann:

$$c_a = 8\,\pi\,\frac{a}{t}\cdot[\alpha + (\iota + \beta)].$$

Nun ist der die Neigung bestimmende Faktor $\frac{a}{t}$ für alle drei Profile nahezu der gleiche, nämlich für Profil:

399: 0,2667, 404: 0,279, 432: 0,280,

d. h. für das Seitenverhältnis $1:\infty$ werden die Ergebnisse durch Gerade mit annähernd gleicher Neigung dargestellt. Die Lage der Geraden hängt also im wesentlichen von einer genauen Bestimmung des Winkels β ab. Daß die theoretisch erhaltenen Werte größer sind als die gemessenen, steht in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen des Hrn. Betz, der bei einem Joukowskischen Profile die theoretischen und gemessenen Auftriebszahlen verglich[1]). Dies wird damit erklärt, daß wegen der Reibung der Grenzschicht die Zirkulation kleiner bleibt, als nach der Theorie zu erwarten wäre.

Ein Vergleich der gemessenen und gerechneten Momentzahlen bei festgehaltenen Anstellwinkeln fällt sehr ungünstig aus. Anders wird die Sachlage aber, wenn man die C_m-Werte in bezug auf die C_a-Werte vergleicht, man erhält dann die in den Abb. 9b, 10b, 11b dargestellten Kurven, die eine gute Uebereinstimmung zeigen. Auch hier sind die gerechneten Werte etwas größer als die gemessenen.

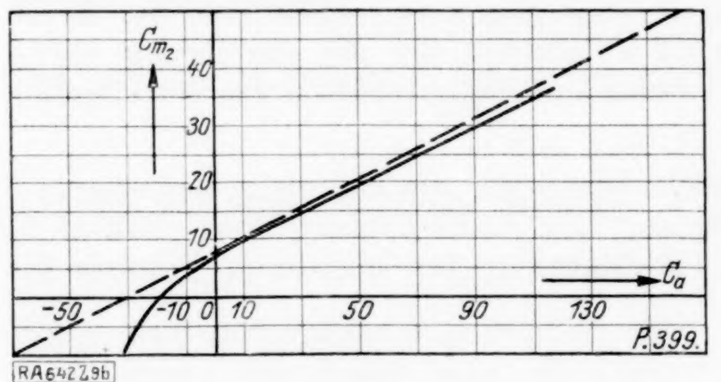


Abb. 9b.

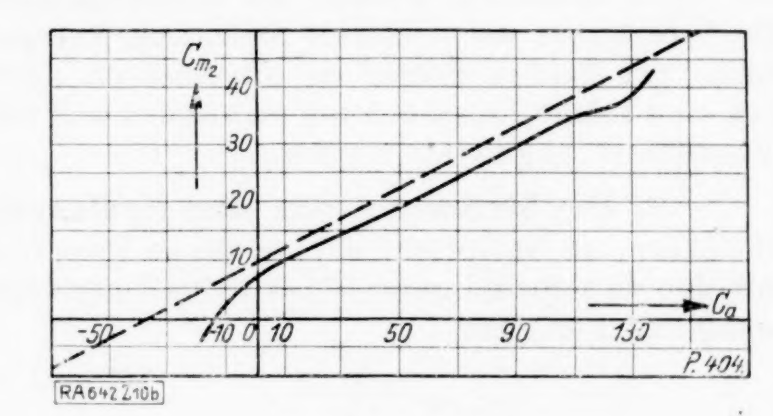


Abb. 10b.

Inwieweit die verschiedene Wahl des Momentenpunktes dabei von Einfluß sein kann, möge folgende Abschätzung zeigen. Es ist unser errechnetes Moment M_2 das der Auftriebskraft in bezug auf den Punkt b, und es sei M_3 das Moment in bezug auf den Punkt s, den Fußpunkt des Lotes von b auf die Profilsehne. Dann folgt aus der Abb. 6:

$$M_3 = M_2 - A\cdot t\cdot \operatorname{tg}\iota\cdot\sin\alpha,$$

oder, durch t^2 und den Staudruck dividiert:

$$c_{m_3} = c_{m_2} - c_a\cdot\operatorname{tg}\iota\cdot\sin\alpha.$$

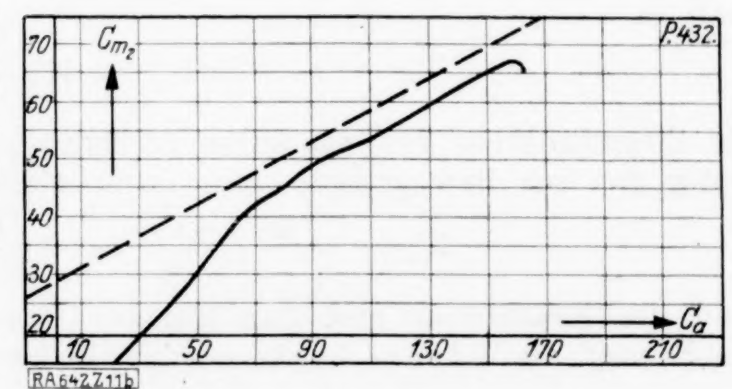


Abb. 11b.

Nun ist für: $\iota < 2^0 20'$ $\operatorname{tg}\iota < 0{,}04$.

In den Figuren ist aber an den Stellen guter Uebereinstimmung:

$$|\alpha| < 6^0 \qquad |\sin\alpha| < 0{,}1.$$

Die Korrektur würde also maximal $0{,}004\ C_a$ betragen, eine merkbare Aenderung wird also durch die andere Wahl des Bezugspunktes nicht hervorgerufen.

Daß die Neigungen der Geraden übereinstimmen, und man die gerechneten Werte für das Seitenverhältnis $1:\infty$ mit den gemessenen Werten vergleichen darf, folgt aus allgemeinen Ueberlegungen[2]). 642

[1]) Vergl. Z. F. M. 1915.

[2]) Vergl. v. Mises, diese Zeitschrift, 2. Bd., S. 71 bis 73.

Stromlinien und Kraftlinien in der konformen Abbildung.

Von **WILHELM MÜLLER** in Hannover.

1. Allgemeines. Wenn ein unendlich langer Zylinder, etwa ein Kreiszylinder, sich senkrecht zu seiner Längsrichtung gegen eine ideale Flüssigkeit bewegt, so werden die Flüssigkeitsteilchen Bewegungen ausführen, die man relativ zum Zylinder und gegen den absoluten Raum betrachten kann. Die Integralkurven der vom Zylinder aus betrachteten Bahnen können wir relative Stromlinien oder kurz Stromlinien nennen; es sind gleichzeitig die Bahnlinien der entsprechenden entgegengesetzen stationären Bewegung der Flüssigkeit gegen den ruhenden Zylinder. Die absoluten Stromlinien können wir mit Lanchester[1]) auch Kraftlinien nennen, weil ihre Richtung mit der Richtung der anfänglichen Beschleunigung übereinstimmt, welche die Flüssigkeitsteilchen annehmen, wenn der Zylinder durch eine Kraft bewegt wird. Wird der Zylinder durch eine Momentankraft aus der Ruhe in die Bewegung übergeführt, so stimmt das Kraftfeld in bezug auf die Richtungen mit dem Geschwindigkeitsfeld überein. Die Intensität von Geschwindigkeit resp. Kraft ist proportional dem Abstand zweier aufeinander folgender Feldlinien, die so gezeichnet sein mögen, daß der Kraftfluß zwischen ihnen derselbe bleibt. Die Linien gleichen Drucks schneiden die Kraftlinien überall senkrecht, sind also gleichbedeutend mit den Potentiallinien der Strömung. Wenn man von einer Strömung um einen Kreiszylinder ausgeht, so kann man das ebene Strömungsfeld um andere Zylinderkonturen durch Vermittlung einer konformen Abbildung ableiten. Infolge des Eindeutigkeitssatzes der Potentialtheorie werden bei dieser Abbildung die Stromlinien der einen Strömung in die Sromlinien der anderen Strömung übergeführt. Dagegen entsprechen sich die Kraftlinien der beiden Felder im allgemeinen nicht. Im Folgenden soll die Bedingung dafür, daß eine solche Entsprechung stattfindet und einige besondere Eigenschaften der betreffenden Strombilder abgeleitet werden.

2. Die Strömung um den Kreiszylinder. Wenn wir die komplexe Koordinate ζ einführen, so entspricht der relativen Parallelströmung um einen Kreiszylinder (Radius R) mit der Geschwindigkeit $V_k = 1$ im Unendlichen in Richtung der negativen ξ-Achse die komplexe Funktion

$$W_r = -\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

woraus in bekannter Weise Potential- und Stromkurven herzuleiten sind. Wenn man dem ganzen Systeme die entgegengesetzte Parallelströmung $+1$ erteilt, so gewinnt man in

$$W_a = -\frac{R^2}{\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

die Stromfunktion der absoluten Strömung, die im Unendlichen ruht, und damit gleichzeitig das zur Bewegungs- resp. Impulsrichtung gehörige Kraftfeld. Wegen

$$W_a = -\frac{R^2(\xi - i\eta)}{\xi^2 + \eta^2} = -\frac{R^2\xi}{\xi^2 + \eta^2} + i\,\frac{R^2\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \Phi_a + i\,\Psi_a \quad . \quad . \quad . \quad (2a),$$

sind die Kraftlinien und Drucklinien (Strom- und Potentiallinien) Kreisbüschel, welche die ξ- resp. die η-Achse im Anfangspunkt berühren; wir werden die Kreisbüschel K_a und K_b nennen. Da die Kraftlinie $\Psi_a = c$ den Radius $\frac{R^2}{2c}$ hat, so wachsen die Kreise K_a wie die reziproken Werte einer arithmetischen Reihe; dem Werte $c = 0$ entspricht die reelle Achse, dem Werte $c = \infty$ der Anfangspunkt (vgl. Abb. 1).

Wenn die Anströmrichtung gegen den Zylinder etwa mit der negativen ξ-Achse den Winkel β macht, so wird die Funktion

$$W_r = -\left(\zeta e^{-i\beta} + \frac{R^2}{\zeta} e^{i\beta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$W_a = -e^{i\beta}\,\frac{R^2}{\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

---

[1]) F. W. Lanchester, Aerodynamik, deutsch von Runge, I. Teil, S. 69 f. — Vergl. auch F. Ahlborn, Z. F. M. (1925), 1. Heft, S. 2. — Wilh. Müller, Wirbelschichten und Zirkulation, Zeitschrift für tech. Physik (1924), S. 450.

3. Die konforme Uebertragung. Das Außengebiet ζ des Kreises wird nun konform auf das Außengebiet z einer andern einfach geschlossenen Kontur abgebildet durch eine Funktion von der allgemeinen Beschaffenheit

$$\zeta = z - \frac{c_1}{z} - \frac{c_2}{z^2} - \ldots \qquad (5),$$

wo die c_i komplexe Größen bedeuten und $|c_1| < R^2$ vorausgesetzt wird.[1]) Bildet man den reziproken Wert dieser Reihe

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_2}{z^4} + \frac{c_1^2 + c_3}{z^5} + \frac{2\,c_1\,c_2 + c_4}{z^6} + \frac{c_1^3 + 2\,c_1\,c_3 + c_2^2 + c_5}{z^7} + \ldots \qquad (6),$$

so sieht man, daß die Strömung (2) übergeht in die Strömung

$$W_r' = -z e^{-i\beta} + \frac{c_1 e^{-i\beta} - R^2 e^{i\beta}}{z} + \frac{c_2 e^{-i\beta}}{z^2} + \frac{c_3 e^{-i\beta} - R^2 c_1 e^{i\beta}}{z^3} + \frac{c_4 e^{-i\beta} - R^2 c_2 e^{i\beta}}{z^4} + \ldots \qquad (7).$$

Zieht man wieder $-z e^{-i\beta}$ ab, so erhält man das neue Kraftliniensystem aus

$$W_a' = \frac{c_1 e^{-i\beta} - R^2 e^{i\beta}}{z} + \frac{c_2 e^{-i\beta}}{z^2} + \frac{c_3 e^{-i\beta} - R^2 c_1 e^{i\beta}}{z^3} + \ldots \qquad (8).$$

Damit diese Reihe bis auf einen konstanten Faktor mit der Reihe (6) übereinstimmt, müssen die Beziehungen gelten

$$\left.\begin{aligned} c_2 = 0,\quad c_3 e^{-i\beta} - R^2 c_1 e^{i\beta} &= (c_1 e^{-i\beta} - R^2 e^{i\beta})\, c_1 \\ c_4 e^{-i\beta} - R^2 c_2 e^{i\beta} &= (c_1 e^{-i\beta} - R^2 e^{i\beta})\, c_2 \\ c_5 e^{-i\beta} - R^2 (c_1^2 + c_3) e^{i\beta} &= (c_1 e^{-i\beta} - R_2 e^{i\beta})(c_1^2 + c_3) \end{aligned}\right\} \qquad (9),$$

woraus sich ergibt

$$c_2 = 0,\; c_3 = c_1^2,\; c_4 = 0,\; c_5 = 2\,c_1^3,\; c_6 = 0,\; c_7 = 5\,c_1^4 \qquad (10),$$

Die abbildende Funktion hat daher die Form

$$\zeta = z - \frac{c_1}{z} - \frac{c_1^2}{z^3} - \frac{2\,c_1^3}{z^5} - \frac{5\,c_1^4}{z^7} - \ldots \qquad (11),$$

und die Funktion W_a' geht über in

$$W_a' = (c_1 e^{-i\beta} - R^2 e^{i\beta}) \left[\frac{1}{z} + \frac{c_1}{z^3} + \frac{2\,c_1^2}{z^5} + \frac{5\,c_1^3}{z^7} + \ldots \right] \qquad (7a).$$

Wenn nun der Faktor $c_1 e^{-i\beta} - R^2 e^{i\beta}$ reell wird, so geht das Kraftlinienbild W_a unmittelbar aus dem oben betrachteten Büschel K_a durch Anwendung der Transformation (11) hervor. Die Reihe (11) ist aber, wie man sieht, die Umkehrung der Transformation

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} \qquad (11\text{a})$$

die eine bekannte geometrische Bedeutung hat. Setzt man $c_1 = p^2 e^{2i\gamma}$ und nimmt man den Punkt ζ auf der Kreiskontur, setzt also $\zeta = R e^{i\varphi}$, so wird

$$z = x + iy = R e^{i\varphi} + \frac{p^2}{R} e^{i(2\gamma - \varphi)}.$$

Dreht man das Achsensystem um den Winkel γ im positiven Sinn, setzt also $z = z' e^{i\gamma}$, $\zeta = \zeta' e^{i\gamma}$, so geht (11a) über in

$$z' = \zeta' + \frac{p^2}{\zeta'},$$

Abb. 1.

$$x' = \left(R + \frac{p^2}{R}\right) \cos\varphi, \quad y' = \left(R - \frac{p^2}{R}\right) \sin\varphi.$$

[1]) Ueber weitere Bedingungen für die Koeffizienten vergleiche diese Zeitschrift Band 3 (1923) S. 117 bis 128.

Durch die Gl. (11a) wird also der Kreis in eine Ellipse mit einer um dem Winkel γ gegen das Bezugssystem gedrehten Achsenlage übergeführt, und es ist damit gezeigt, daß nur beim Uebergang vom Kreis zur Ellipse die Winkel zwischen Kraftlinien und Kontur erhalten bleiben. Die Halbachsen haben die Längen $a = R + \frac{p^2}{R}$ und $b = R - \frac{p^2}{R}$, woraus die lineare Exzentrizität

$$e = 2p \qquad (12),$$

sich ergibt. Da die Schar der Kreise K_a geometrisch vom Radius R des Grundkreises unabhängig ist, so ergibt sich, daß das Kraftliniensystem E_a allen zu p gehörigen konfokalen Ellipsen gemeinsam ist. Da aber aus der Forderung, daß der Faktor der Reihe 7a) reell sei, die Bedingung

$$\left.\begin{aligned} p^2 \sin(2\gamma - \beta) = R^2 \sin\beta, \text{ oder } (a-b)\sin(2\gamma - \beta) = (a+b)\sin\beta; \\ \operatorname{tg}\beta = \frac{p^2 \sin 2\gamma}{R^2 + p^2 \cos 2\gamma} = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\gamma}{a + b\operatorname{tg}^2\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

resultiert, so sieht man, daß zu jeder Ellipse der konfokalen Schar eine besondere aus (13) zu berechnende Bewegungsrichtung gehört, welche das System der Kraftlinien (7a) ergibt. Wenn man den Winkel $\alpha = \gamma - \beta$ zwischen großer Ellipsenachse und Bewegungsrichtung einführt, so kann man an Stelle von (13) auch schreiben

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\gamma \qquad (13a).$$

Sind die Achsen a, b und β resp. α gegeben, so kann man γ, d. h. die Lage der Kreisschar K_a, aus denen die Kraftlinien E_a gewonnen werden können, bestimmen.

Führt man die Hilfsvariable $\omega = \mu + i\nu$ durch die Beziehung

$$\zeta = p\, e^{i\gamma} e^{\omega} \qquad (14)$$

ein, so wird[1])

$$z = 2p\, e^{i\gamma} \cos\omega \qquad (15).$$

Damit geht die Kraftfunktion über in

$$W_a' = \frac{p^2 \cos(2\gamma - \beta) - R^2 \sin\beta}{p\, e^{i\gamma}} e^{-\omega} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}(a \sin\gamma \sin(\beta - \gamma) - b \cos\gamma \cos(\beta - \gamma)) e^{-\omega} \quad (16),$$

$$\Psi_a' = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}(a \sin\gamma \sin(\beta - \gamma) - b \cos\gamma \cos(\beta - \gamma)) e^{-\mu} \sin(\nu + \gamma) \quad (17),$$

oder bei Benutzung von (13)

$$\Psi_a' = \frac{p \sin 2(\gamma - \beta)}{\sin\beta} e^{-\mu} \sin(\nu + \gamma) \qquad (17a).$$

Eine Ausnahmestellung nimmt der Fall $p = R$ ein. Damit geht der Kreis in die die Brennpunkte verbindende (doppelt zu zählende) Strecke, der Kreiszylinder also in die unendlich lange und unendlich dünne Platte (Lamelle) über. Da in diesem Fall nach (13) $\beta = \gamma$ wird, so verschwindet der Faktor der Reihe (7a). Das Kraftliniensystem einer ebenen Platte ist also von der Bewegungsrichtung unabhängig. Wir werden später auf den Fall zurückkommen.

4. Konstruktion der Kraftlinien. Um die Kraftlinien für die Bewegung des elliptischen Zylinders in der Richtung β zu erhalten, ist es erforderlich, auf den Kreisbüschel K_a die Transformation

$$z = \zeta + \frac{p^2 e^{2i\gamma}}{\zeta}$$

anzuwenden. Diese Uebertragung ist geometrisch leicht durchzuführen. Zunächst verwandelt sich der Kreis K_a mit dem Radius r durch die reziproke Transformation $\frac{p^2 e^{2i\gamma}}{\zeta}$ in eine gerade Linie G_a, welche mit der ξ-Achse den Winkel 2γ bildet und vom Anfangspunkt den Abstand $\frac{p^2}{2r} = d$ hat. Wenn man dann dem Radiusvektor eines Punktes des

[1]) Vergl. auch H. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik (J. Friedel), Leipzig 1907, S. 99.

Kreises K_a den Radiusvektor des entsprechenden Punktes auf G_a, der also auf dem an $\eta = \xi \operatorname{tg} \gamma$ gespiegelten Strahl liegt, graphisch hinzufügt, so erhält man im Endpunkt einen Punkt der Kraftlinie E_a der Ellipsenströmung (vergl. Abb. 2).

In der Abb. 3 sind die Kraftlinien für eine Ellipse dargestellt, die gleichzeitig bei entsprechender Veränderung der Bewegungsrichtung β auch für das ganze System konfokaler Ellipsen gültig bleiben. Zum Vergleich sind auch teilweise die (relativen) Stromlinien für die entsprechende Anströmrichtung veranschaulicht.

Die Originaldimensionen waren $R = 5$, $p = 3$, $e = 6$ cm, $\gamma = 30^0$, es ergibt sich dann für β der Winkel $14^0\,47'$. Wenn der Radiusvektor des Kreispunktes mit der ξ-Achse den Winkel φ bildet, so lauten die Gleichungen von E_a

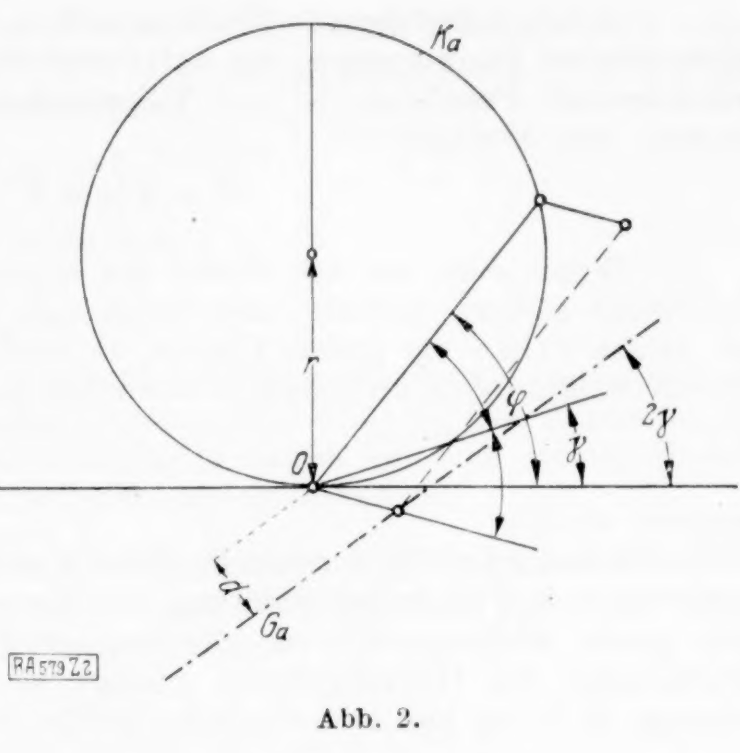


Abb. 2.

$$x = 2\,r \sin\varphi \cos\varphi + \frac{d \cos(2\gamma - \varphi)}{\sin\varphi}, \qquad y = 2\,r \sin^2\varphi + \frac{d \sin(2\gamma - \varphi)}{\sin\varphi} \quad . \quad . \quad (18).$$

Die Elimination von φ ist im allgemeinen Fall mit Schwierigkeiten verbunden.

Wenn man $\varphi = \psi + \gamma$ setzt, also den Winkel ψ gegen die Hauptachsenrichtung der Ellipsen einführt und diese Achse zur x'-Achse macht, so geht (18) über in

$$x' = \frac{\cos\psi}{\sin(\psi+\gamma)}\left[2\,r \sin^2(\psi+\gamma) + d\right], \qquad y' = \frac{\sin\psi}{\sin(\psi+\gamma)}\left[2\,r \sin^2(\psi+\gamma) - d\right] . \quad (19).$$

Man sieht aus den Gl. (18) und (19) und auch direkt, daß den beiden zu $\eta = 0$ spiegelbildlich gelegenen Kreisscharen K_a zwei E-Büschel entsprechen, die in bezug auf den Mittelpunkt O symmetrisch gelegen sind. Die Kurven beginnen als Kraftlinien in einem Punkte auf der einen Seite der Ellipsen und enden auf der anderen Seite in einem von der Bewegungsrichtung gleich weit abstehenden Punkte.

Denn wenn den Kreispunkten die Werte φ und $\pi - \varphi$ zugehören, so sind die entsprechenden Punkte in der Ellipsenebene

$$z_1 = R\,e^{i\varphi} + \frac{p^2}{R}\,e^{i(2\gamma-\varphi)},$$

$$z_2 = -R\,e^{-i\varphi} - \frac{p^2}{R}\,e^{i(2\gamma+\varphi)}.$$

Für die Verbindungslinie hat man daher

$$z_1 - z_2 = 2\cos\varphi\left(R + \frac{p^2}{R}\,e^{2i\gamma}\right),$$

also in der Tat nach (18) dieselbe Richtung wie die Bewegungsrichtung.

Abb. 3.

Aufeinanderfolgende Kraftlinien $\Psi = c$, $\Psi = c + \delta$, $\Psi = c + 2\,\delta$ bestimmen auf dem Grundkreise Punktepaare, die auf Parallelen im konstanten Abstand δ liegen. Die entsprechenden Parallelen in der Ellipsenebene haben dann, wie eine einfache Rechnung ergibt, den Abstand

$$\delta' = \delta\left(\cos\beta - \frac{p^2}{R^2}\cos(2\,\gamma - \beta)\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Wenn man an der durch die Konstruktion gegebenen Zuordnung der Kraftlinien in beiden Ebenen festhält, oder wenn man den durch eine Kraftröhre gehenden Kraftfluß in beiden Fällen als gleich ansieht, so muß daher die dem konstruierten Kraftliniensystem entsprechende Geschwindigkeit des elliptischen Zylinders durch

$$V_e = \frac{R^2}{R^2\cos\beta - p^2\cos(2\,\gamma - \beta)} \cdot V_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

ersetzt werden.

Setzt man die Kurven E_a über ihre Verwendbarkeit als Stromlinien hinaus fort, so sieht man, daß sie in der Richtung $\varphi = 2\gamma$ unendlich ferne Punkte haben und im Endlichen die große Ellipsenachse im allgemeinen dreimal durchschneiden. Wegen der radialen Symmetrie des Gesamtsystems genügt es, das Teilsystem zu betrachten, das aus dem oberen (d. h. im positiven Ordinatengebiet gelegene) Kreisbüschel der ζ-Ebene hervorgeht.

Orientierungspunkte der Kurve sind etwa die Punkte $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ und die Schnittpunkte mit der Hauptachse $\varphi = \gamma$, $\psi' = 0$ der Ellipse. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ gibt $x = \frac{p^2}{2\,r}\sin 2\,\gamma$, $y = 2\,r - \frac{p^2}{2\,r}\cos 2\,\gamma$; $x' = 0$, $y' = 2\,r\cos\gamma - \frac{p^2}{2\,r\cos\gamma}$.

Unter den Schnittpunkten mit der Hauptachse ist zunächst $\psi = 0$ am einfachsten zu bestimmen. Wir erhalten

$$x_3' = \frac{1}{\sin\gamma}\left[2\,r\sin^2\gamma + \frac{p^2}{2\,r}\right] = 2\,r\sin\gamma + \frac{p^2}{2\,r\sin\gamma} \quad . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Dieser Schnittpunkt liegt im allgemeinen außerhalb der Brennweite. Dem Minimum von x_3' entspricht der Radius $r = \frac{p}{2\sin\gamma}$, das ergibt aber gerade die Brennweite $x_3' = 2\,p$. Die beiden anderen Schnittpunkte ergeben sich aus

$$\sin^2(\psi + \gamma) = \left(\frac{p}{2\,r}\right)^2, \quad \sin(\psi + \gamma) = \pm\frac{p}{2\,r} = \pm\frac{e}{4\,r}.$$

Mit den daraus resultierenden Werten

$$\psi_1 = \operatorname{arctg}\frac{e}{4\,r} - \gamma, \quad \psi_2 = \pi - \left(\gamma + \arcsin\frac{e}{4\,r}\right)$$

erhält man

$$x_1' = e\cos\psi_1, \quad x_2' = e\cos\psi_2$$

oder

$$x'_{1,2} = e\left(\frac{e}{4\,r}\sin\gamma \pm \sqrt{1 - \frac{e^2}{16\,r^2}}\cos\gamma\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Man sieht daraus, daß die beiden Schnittpunkte zwischen beide Brennpunkte fallen und den Grenzpunkten $\pm\,e\cos\gamma$ um so näher rücken, je größer der Radius r oder je weiter die Erstreckung der Kraftlinie im Stromgebiet wird.

Für $r = \frac{e}{4}$ fallen beide Schnittpunkte in den Punkt $x = e\sin\gamma$, der dann zum Berührungspunkt wird. Wenn $r < \frac{e}{4}$ ist, bleibt nur der Schnittpunkt x_3' übrig.

Es ergibt sich weiter, daß die Kurven einen verschiedenen Verlauf zeigen, je nachdem $r \gtreqless \frac{p}{2\sin\gamma}$ wird. Wenn $r > \frac{p}{2\sin\gamma}$ ist, so hat die Kurve eine Schleife, welche den rechts gelegenen Brennpunkt $x' = e$ umfaßt. Wenn $r = \frac{p}{2\sin\gamma}$ ist, wird dieser Brennpunkt zur Spitze; wenn $r < \frac{p}{2\sin\gamma}$, geht die Kurve durch Vermittlung einer Wendestelle an dem rechts gelegenen Brennpunkte vorbei.

Es interessieren nun weiter die oben erwähnten Grenzpunkte $x' = \pm e \cos \gamma$. Das sind Punkte der Kraftlinie, welche dem Kreis $r = \infty$, d. h. der geraden Linie $\eta' = -\xi' \operatorname{tg} \gamma$ entspricht. Führt man in der Transformationsgleichung

$$x' + i y' = \xi' + i \eta' + \frac{p^2 (\xi' - i \eta')}{\xi'^2 + \eta'^2}$$

$\eta' = -\xi' \operatorname{tg} \gamma$ ein, so ergibt sich durch Elimination von ξ'

$$\frac{x'^2}{4 p^2 \cos^2 \gamma} - \frac{y^2}{4 p^2 \sin^2 \gamma} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Dem Kreis $r = \infty$ entspricht also eine zur Grundellipse konfokale Hyperbel. In Uebereinstimmung mit den obigen Bemerkungen finden wir, daß die Schnittpunkte mit der Ellipsenachse die Abstände $\pm e \cos \gamma$ vom Mittelpunkt haben und daß sie im Unendlichen mit den Fortsetzungen der anderen Kraftlinien gleichlaufend ist.

Spezielle Fälle [1]. 1. $\gamma = 0$. Aus der Gl. (13) erkennt man, daß die Verdrehung der Bewegungsrichtung des Kreiszylinders gegenüber dem elliptischen Zylinder nur dann verschwindet, wenn γ entweder $= 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ ist.

Das ergibt die beiden symmetrischen Fälle der Bewegung der Ellipse in der Richtung der großen oder der kleinen Achse. Das entstehende Kraftlinienbild hat Gültigkeit für das ganze System von konfokalen, zur Exzentrizität $2p$ gehörigen Ellipsen.

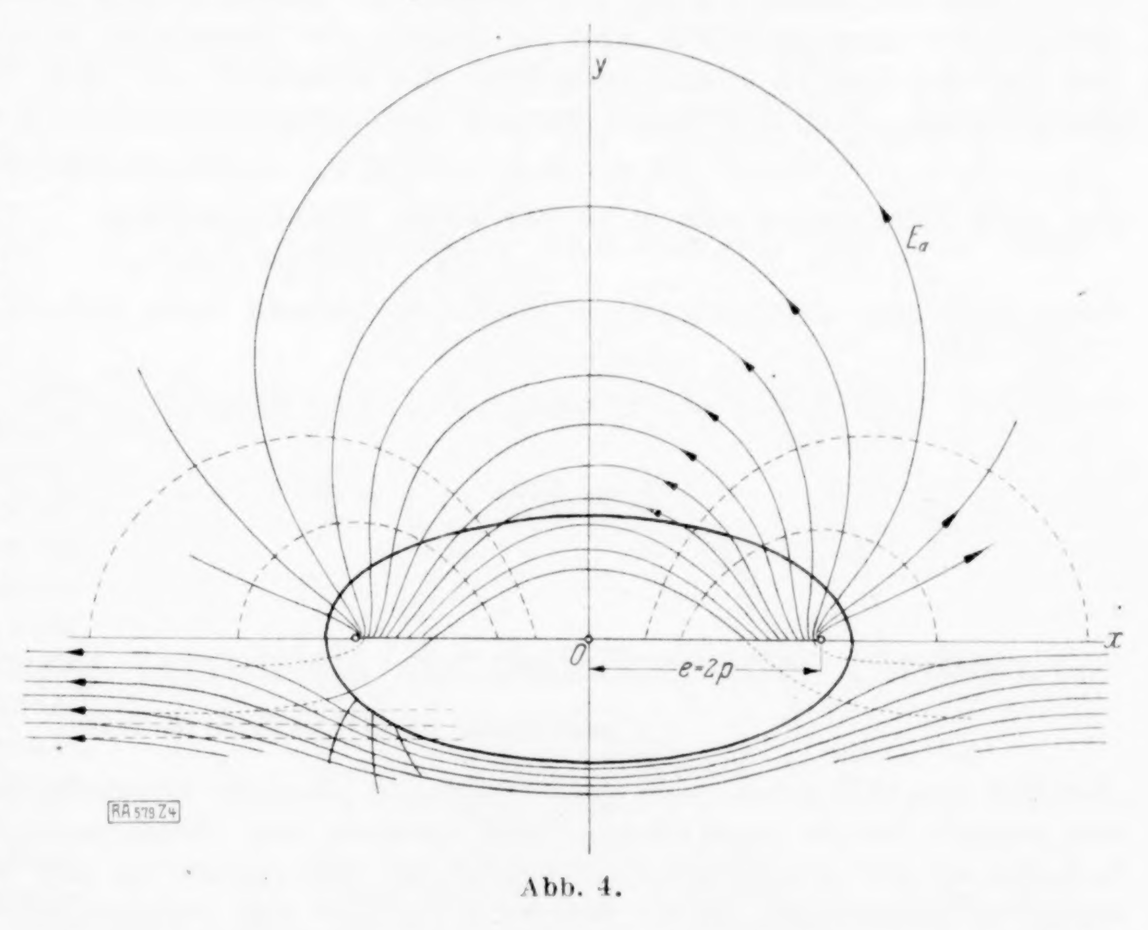


Abb. 4.

Im Falle $\gamma = 0$, den wir zuerst betrachten, ist nur die doppelt zu zählende Strecke $\pm 2p$ auszuschließen, da hier der Faktor $R^2 - c_1$ bei der Funktion W_a' identisch verschwindet, oder da, wie man unmittelbar sieht, hier überhaupt keine Störung des flüssigen Mediums eintritt. Die Parameterdarstellung der Kraftlinien (vergl. Abb. 4) nimmt für $\gamma = 0$ nach (18) die Form an

$$x = 2 r \sin \varphi \cos \varphi + d \operatorname{ctg} \varphi, \qquad y = 2 r \sin^2 \varphi - d \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Die Elimination von φ, die hier leicht auszuführen ist, ergibt die Gleichung

$$x^2 (y + d) - (y + 2 d)^2 (2 r - y + d) = 0$$

$$x^2 = \frac{(y + 2 d)(2 r - y + d)}{y + d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Man sieht hier sofort, daß x unendlich wird für $y = -d = -\frac{p^2}{2 r}$, daß $x = 0$ einem Maximum $y = 2 r - d$ entspricht und daß die Schnittpunkte mit der Ellipsenachse für $r > \frac{e}{4} = \frac{p}{2}$ innerhalb der Brennweite fallen und den Brennpunkten um so näher rücken, je größer r ist, da für $y = 0$

$$x^2 = 4 d (2 r - d) = e^2 \left(1 - \left(\frac{e}{4 r}\right)^2\right).$$

[1]) Vergl. etwa H. Lamb, a. a. O., S. 100 f.

Bei großem Radius r kann man als Näherungskurve einen durch die Brennpunkte gehenden Kreis substituieren.

Ist $r < \frac{e}{4}$, so verläuft die Kurve E_a unterhalb der x-Achse. Dem Maximum von x entspricht die Gleichung

$$ry = (y + d)^2,$$

woraus

$$y = \frac{r - 2d \pm \sqrt{(r-2d)^2 - 4d^2}}{2} = \frac{r - 2d \pm \sqrt{r^2 - 4rd}}{2}.$$

Beide Werte von y sind für $r > p\sqrt{2}$ reell und positiv. Sie fallen zusammen für $r = p\sqrt{2} = {}^1/_2\, e\sqrt{2} = 4d$. Die zugehörige Kurve hat in den Punkten $y = {}^1/_4\, p\sqrt{2}$, $x = \pm\, {}^3/_4\, p\sqrt{6}$ vertikale Wendetangenten. Wird $r < {}^1/_2\, e\sqrt{2} = p\sqrt{2}$, so werden beide Werte imaginär; die Wendetangenten schneiden sich in einem Punkte der positiven y-Achse.

2. Der Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so gibt die Gleichung (13)

$$p^2 \sin(\pi - \beta) = R^2 \sin\beta, \qquad \beta = 0, \text{ resp. } = \pi.$$

Die Längserstreckung der Ellipse ist senkrecht zur Bewegungsrichtung, die mit der x-Achse zusammenfällt, und im System der konfokalen elliptischen Zylinder ist auch der Fall der ebenen Platte enthalten, die senkrecht zu ihrer Ebene in der Flüssigkeit bewegt wird. Die Kraftlinien werden durch das Gleichungssystem umfaßt.

$$x = 2r \sin\varphi \cos\varphi - d \operatorname{ctg}\varphi, \qquad y = 2r\sin^2\varphi + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

das nach Elimination von φ zu der einen Gleichung führt

$$x^2 = \frac{(y - 2d)(2r - y + d)}{y - d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Die Kurven haben einen zur y-Achse symmetrischen Verlauf und gehen als Kraftlinien von der einen Seite der Ellipse, resp. der Plattenspur $\pm 2ip$ aus, erreichen außerhalb der Brennweite ihre größte Ordinate und gehen auf der andern Seite der Achse zur Ellipse, resp zum Ausgangspunkt auf der Platte zurück.

Wenn man die Kurven analytisch fortsetzt auf Grund der Gl. (28) so erkennt man, daß der Schnittpunkt mit der y-Achse ein Doppelpunkt ist und daß die Kurven über diesen Punkt hinaus ins Unendliche gehen; die Asymptote hat von der reellen Achse den Abstand $\pm d$, je nachdem die Kurve im Gebiet oberhalb oder unterhalb der Achse verläuft. Der höchste Abstand vom Nullpunkt beträgt

Abb. 5.

$$y_{\max} = 2r + \frac{p^2}{2r}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum für $p = 2r$ mit $y = 2p$. Die Gleichung lautet für diesen Fall

$$x^2 = \frac{(y - 4r)^3}{y - 2r} = \frac{(y - 2p)^3}{y - p}.$$

Der Brennpunkt der Ellipse wird zur Spitze und die Asymptote geht durch die Mitte der Brennweite. Die Kreise mit $r < \frac{p}{2}$ kommen für das Kraftliniensystem nicht mehr in betracht. Da eine beliebige Bewegung der ebenen Platte zusammengesetzt werden kann aus zwei Komponenten, einer in ihre Ebene fallenden und einer senkrecht dazu gerichteten, so ergibt sich nach Abschnitt **3,** daß das Kraftliniensystem der Abb. 5 für jede Bewegungsrichtung der Platte gültig ist.

Wenn man die beiden Kraftliniensysteme $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ auf dieselbe Lage der Brennpunkte bezieht, so sieht man, daß sie sich senkrecht durchschneiden. Das folgt ohne weiteres aus der Tatsache, daß die entsprechenden Kraftlinien um den Kreiszylinder orthogonale Trajektorien sind. Wenn also das eine System die Bedeutung wie Kraftlinien hat, so ist die andere Kurvenschar das System der zugehörigen Druckkurven.

Aus den Fällen $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ kann in bekannter Weise auch der allgemeine Fall der schiefen Bewegung des elliptischen Zylinders abgeleitet werden. Nach (17) haben wir für $\gamma = 0$, resp. $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$$\Psi_a' = -b \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\, e^{-\mu} \sin \nu, \quad \text{resp.} \quad \Psi_a' = a \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\, e^{-\mu} \cos \nu .$$

Wenn der Zylinder sich mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung α gegen die große Achse bewegt, so wird die Kraftfunktion

$$\Psi_a' = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\, e^{-\mu} (a \sin \alpha \cos \nu - b \cos \alpha \sin \nu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Dieser Ausdruck stimmt aber überein mit dem Imaginärteil des aus (9a) resultierenden Ausdrucks

$$W_a' = -e^{-\mu} \left[\frac{R^2}{p} \sin(\beta - \gamma - \nu) + p \sin(\beta - \gamma + \nu) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

wenn man $\beta - \gamma = \alpha$ und $R = \frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{p^2}{R} = \frac{1}{2}(a-b)$ setzt. 579

Über Erwärmung vermittels durchströmender Medien.

Von **A. ANZELIUS** in Stockholm.

1. In der Technik geschieht mitunter die Erwärmung eines festen Körpers dadurch, daß man ein warmes Medium durch ihn strömen läßt. Auch kann dieser Prozeß den Zweck haben, die Wärme nur auf einige Zeit im Körper aufzuspeichern, wie es der Fall bei den regenerativen Anordnungen ist. Um den Verlauf dieses Erwärmungsprozesses theoretisch verfolgen zu können, idealisieren wir ihn in folgender Weise:

Ein wärmeführendes Medium strömt unter konstanter Anfangstemperatur und mit konstanter Geschwindigkeit in eine Röhre hinein, die einen festen Körper in feinverteiltem Zustand und von anderer Temperatur enthält. Unser Problem ist, die Temperaturen als Funktion von Zeit und Ort zu bestimmen.

Wir nennen das wärmeführende Medium Dampf und den festen Körper Eisen, berücksichtigen aber bei der Untersuchung die speziellen physikalischen Eigenschaften dieser Stoffe nicht.

2. Die spezifische Wärme des Dampfes und des Eisens wird als konstant betrachtet. Wir nehmen an, daß die Wärmeübertragung von Dampf an Eisen dem Temperaturunterschied proportional ist. Der Wärmeaustausch zur Rohrwand und zwischen den Eisenpartikeln gegenseitig und den Dampfpartikeln gegenseitig, wird vernachlässigt. In jedem Schnitt senkrecht zur Längsrichtung der Röhre ist in einem gewissen Augenblick die Temperatur des Eisens bzw. des Dampfes konstant. Also werden die Temperaturen außer von der Zeit nur von einer Koordinate x abhängig sein. Diese messen wir an der Mündung des Rohres, wo der Dampf eintritt, positiv in der Bewegungsrichtung des Dampfes. Die Temperatur des Eisens bezeichnen wir mit U, und die Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur einer Volumeneinheit des Eisens in der auftretenden

Verteilung um eine Temperatureinheit zu erhöhen, sei u. Die entsprechenden Größen des Dampfes bezeichnen wir mit V und v. Die Wärmeübergangszahl zwischen Dampf und Eisen sei k, und die konstante Geschwindigkeit des Dampfes setzen wir gleich c.

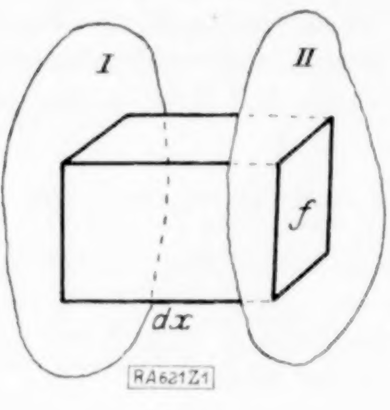


Abb. 1.

3. Wir studieren ein Volumenelement des Rohres, begrenzt von einer Zylinderfläche, deren Erzeugende der Längsrichtung des Rohres parallel sind und deren Durchschnittsfläche gleich f ist, sowie von zwei zu dieser Richtung senkrechten Ebenen I und II im Abstand dx.

Zur Zeit t enthält das Eisen im Volumenelement fdx die Wärmemenge $uUfdx$, und zur Zeit $t+dt$ ist der Wärmeinhalt $u\left(U+\frac{\partial U}{\partial t}dt\right)fdx$. Also die zugeführte Wärmemenge

$$dQ_1 = uf\frac{\partial U}{\partial t}dt\,dx \quad \ldots \ldots \quad (a).$$

In derselben Weise ist zur Zeit t der Wärmeinhalt des Dampfes innerhalb des Volumenelements fdx gleich $vVfdx$ und zur Zeit $t+dt$ gleich $v\left(V+\frac{\partial V}{\partial t}dt\right)fdx$. Mit dem durch die Ebene I strömenden Dampf ist indessen in der Zeit dt dem Element die Wärmemenge $vVfcdt$ zugeführt worden und in derselben Zeit $v\left(V+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)fcdt$ durch die Ebene II dem Element entnommen. Der Dampf hat also dem Eisen die Wärmemenge

$$dQ_2 = vVfdx + vVfcdt - v\left(V+\frac{\partial V}{\partial t}dt\right)fdx - v\left(V+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)fcdt$$

$$= -v\left(\frac{\partial V}{\partial t}+c\frac{\partial V}{\partial x}\right)f\,dt\,dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

zugeführt. Nach dem angenommenen Gesetz des Wärmeüberganges ist die von Dampf an Eisen übertragene Wärmemenge

$$dQ_3 = k(V-U)f\,dt\,dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c).$$

Die Gleichungen (a), (b) und (c) geben nun das System

$$\left.\begin{aligned} v\left[\frac{\partial V}{\partial t}+c\frac{\partial V}{\partial x}\right] &= k(U-V) \\ u\frac{\partial U}{\partial t} &= k(V-U) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein

$$\frac{k}{cv} = a, \qquad \frac{k}{cu} = b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und setzen

$$\xi = ax, \qquad \tau = b(ct-x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

wodurch das System (1) in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} &= U - V \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= V - U \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

übergeht.

Die Funktion $\Delta(\xi,\tau)$, bestimmt durch

$$\Delta(\xi,\tau) = e^{\xi+\tau}(V-U) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

genügt also nach (4) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi\,\partial \tau} = \Delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

wovon man sich durch zweimaliges Differenzieren von (5) überzeugt.

4. Als Anfangsbedingung gilt nun, daß die Erwärmung des Eisens im Augenblick beginnt, da es vom Dampf erreicht wird, also $x = ct$ oder nach Gl. (3) $\tau = o$ ist. Die Anfangstemperatur des Eisens sei U_1. Nach den Voraussetzungen strömt der Dampf mit einer konstanten Temperatur, die wir mit V_1 bezeichnen wollen, ein. Wir suchen also solche Lösungen $V(\xi,\tau)$, $U(\xi,\tau)$, daß

$$U(\xi,o) = U_1, \qquad V(o,\tau) = V_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und also nach Gl. (4)

$$U(o,\tau) = V_1 - (V_1 - U_1)\,e^{-\tau}, \qquad V(\xi,o) = U_1 + (V_1 - U_1)\,e^{-\xi}.$$

Die Grenzbedingungen der Funktion $\Delta(\xi,\tau)$ werden folglich

$$\Delta(\xi,o) = \Delta(o,\tau) = V_1 - U_1.$$

5. Die Gl. (6) wird durch wiederholte Annäherungen gelöst [1]) indem wir für Δ setzen

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots,$$

$$\text{wo } \frac{\partial^2 \Delta_n}{\partial \xi\, \partial \tau} = \Delta_{n-1}$$

$$\text{und } \Delta_0 = V_1 - U_1.$$

Es ergibt sich

$$\Delta_n = (V_1 - U_1)\int_0^\xi \ldots \int_0^\xi d\xi^n \int_0^\tau \ldots \int_0^\tau d\tau^n = (V_1 - U_1)\frac{(\xi\tau)^n}{(n!)^2},$$

und da die Reihe konvergiert

$$\Delta = (V_1 - U_1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi\tau)^n}{(n!)^2} = (V_1 - U_1)\,J_0(2i\sqrt{\xi\tau}),$$

wo J_0 die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung ist, definiert durch die Reihe $J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}$. Nach Gl. (5) erhalten wir nun

$$V - U = (V_1 - U_1)\,e^{-(\xi+\tau)}\,J_0(2i\sqrt{\xi\tau}) \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Es ergibt sich also die Lösung nach (3), (4) und (7)

$$\left.\begin{aligned} V &= V_1 - (V_1 - U_1)\,e^{-b(ct-x)}\int_0^{ax} e^{-s} J_0(2i\sqrt{b(ct-x)s})\,ds \\ U &= U_1 + (V_1 - U_1)\,e^{-ax}\int_0^{b(ct-x)} e^{-s} J_0(2i\sqrt{axs})\,ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9).$$

Für x-Werte, die größer sind als ct, hat die Lösung (9) keinen physikalischen Sinn. Für solche x ist $U = U_1$ und der Dampf existiert nicht. Mit Verwendung des asymptotischen Wertes $J_0(ip) \infty \frac{e^p}{\sqrt{2\pi p}}$ [2]) findet man aus den Gleichungen (8) und (9), daß sich sowohl V als U für große t-Werte dem Wert V_1 nähern.

6. Für die in der Technik vorkommenden Fragen wird man im allgemeinen x gegen ct vernachlässigen können und also die Gl. (3) gegen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ax \\ \tau &= bct \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3\text{a})$$

vertauschen. Man erhält dann die angenäherte Lösung

$$\left.\begin{aligned} V &= V_1 - (V_1 - U_1)\,e^{-bct}\int_0^{ax} e^{-s} J_0(2i\sqrt{bcts})\,ds \\ U &= U_1 + (V_1 - U_1)\,e^{-ax}\int_0^{bct} e^{-s} J_0(2i\sqrt{axs})\,ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9\text{a}),$$

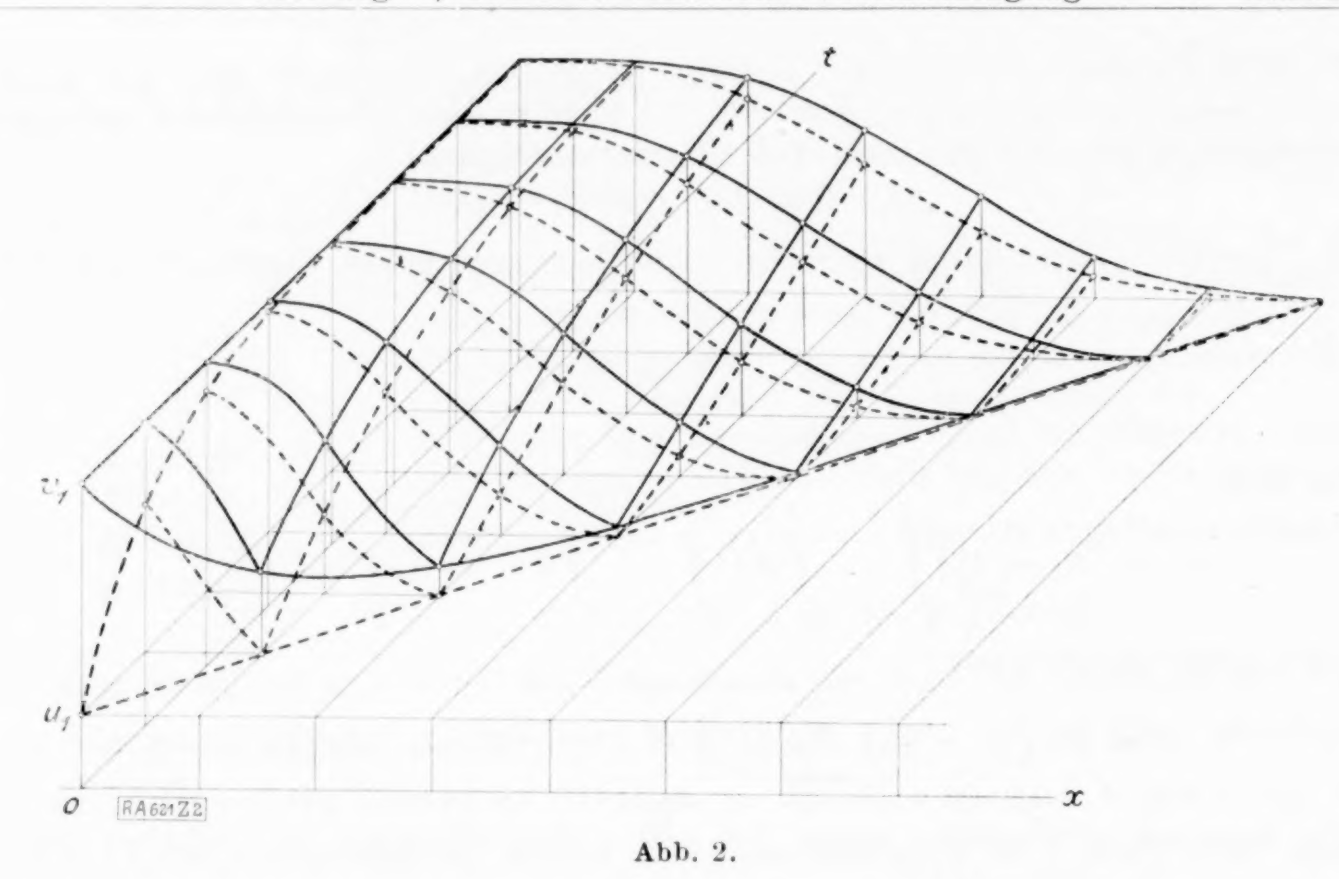
welche hinreichend genaue Resultate geben wird.

Die Fehler, die von Idealisierungen bei der mathematischen Behandlung herrühren, werden sich im gewissem Grade dadurch aufheben, daß die Konstante k aus einem Probe-

---

[1]) Man kann auch die Riemannsche Integrationsmethode auf diese Gleichung anwenden oder das Verfahren der Näherungsfolgen an Gl. (4) ausführen.

[2]) Siehe z. B. Jahnke und Emde: Funktionstafeln, Leipzig 1909, S. 100.



RA 621 Z 2

Abb. 2.

versuch berechnet werden kann, bei dem sich zum Beispiel U durch Temperaturmessung unmittelbar bestimmen läßt.

7. Die Abb. 2 zeigt den Verlauf der V- und U-Kurven unter Annahme $c = 1$. Bei der Berechnung ist für $x > 10$ der Ausdruck $J_0(ix) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ benutzt worden. 621

Über die Eulerschen Knickbedingungen für Stäbe mit Schneidenlagerung.

Von **P. FILLUNGER** in Wien.

Man pflegt bei der Beanspruchung eines geraden, schlanken Stabes auf Knickung zwischen Stabenden, die frei beweglich, in Spitzen gelagert oder eingespannt sind, zu unterscheiden. Diese Randbedingungen können als Grenzfälle einer allgemeineren elastischen Festhaltung der Stabenden gelten, und indem man sie für beide Stabenden auf jede mögliche Art zusammensetzt und sodann die Knicklast berechnet, gelangt man zu den unter dem Namen die »Eulerschen Knickbedingungen« bekannten, für die Berechnung schlanker gedrückter Stäbe als grundlegend angesehenen Knickformeln. Es ist aber leicht eine unelastische Befestigungsart der Stabenden anzugeben, welche von jeder der vorgenannten grundsätzlich verschieden ist. Sie besteht darin, daß der Endquerschnitt sich nur um eine bestimmte die Stabachse schneidende Achse ohne äußeren Widerstand drehen kann. Eine solche Befestigung möge im Folgenden als »Schneidenlagerung«, die Drehachse selbst als die »Schneide« bezeichnet werden. In der Ebene, welche durch die Schneide und die Stabachse bestimmt ist, erscheint das Stabende so, als ob es vollkommen eingespannt wäre. Wir nennen diese Ebene daher die Einspannungsebene, die zu ihr senkrechte, durch die Stabachse gelegte Ebene die Bewegungsebene des betreffenden Stabendes.

Sind nun für die Stabenden kinematische Bedingungen vorgeschrieben, so haben wir drei Fälle mit Schneidenlagerung getrennt zu untersuchen und zwar:

1. Ein Stabende besitzt Schneidenlagerung, das andere Spitzenlagerung.
2. Beide Stabenden besitzen Schneidenlagerung.
3. Ein Stabende besitzt Schneidenlagerung, das andere ist vollkommen eingespannt.

Die Winkel, welche die Schneiden mit den Achsen der Zentralellipse des Querschnittes einschließen, können in jedem Falle beliebig gewählt werden. Schneiden, welche nicht senkrecht zur Stabachse liegen, werden zunächst nicht betrachtet.

Zur Berechnung der Knicklast soll derjenige Weg eingeschlagen werden, welcher wohl am einfachsten zum Ziele führt. Es wird angenommen, daß der Stab unter der Einwirkung der Last nicht gerade bleibt. Seine mit den Randbedingungen verträgliche Ausbiegung soll sehr klein sein. Dann entsteht die Frage, ob noch Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften bestehen kann, wobei unter äußeren Kräften neben der Last auch jene allgemeinsten Auflagerreaktionen zu verstehen sind, welche infolge der angenommenen Formänderung und der Befestigungsweise der Stabenden möglich sind. Die Beantwortung dieser Frage führt unmittelbar zur »Knickbedingung« und zur »Knicklast«, weil sich herausstellt, daß dieses Gleichgewicht nur für bestimmte Werte der axialen Belastung vorhanden ist.

Diese Art der Ableitung der Knicklast besitzt freilich den Mangel, daß man sich dabei vorstellen muß, es greife außer der axialen Last auch noch eine kleine, den Stab biegende Belastung an, welche in dem Augenblicke verschwindet, in welchem die Last einer Knicklast gleich wird. Dieser Mangel dürfte jedoch mit Rücksicht auf die Vereinfachung der Rechnungen, welche die etwas gezwungene, soeben genannte Voraussetzung gestattet, nicht allzusehr ins Gewicht fallen.

Setzt man sich darüber hinweg, daß die Entstehung der Ausbiegung nicht durch die Theorie selbst erklärt wird, so ist sie in sich vollkommen abgeschlossen und beweiskräftig, wenn wenigstens nachträglich gezeigt werden kann, daß die Gestalt der gebogenen Stabachse in allen wesentlichen Stücken wirklich mit der Annahme übereinstimmt. Daher ist es notwendig, die elastische Linie des Stabes zu bestimmen. In den gebräuchlichen Lehrbüchern der Elastizitäts- und Festigkeitslehre wird sie als eine ebene Kurve vorausgesetzt, und zwar liegt sie in der Ebene der kleinen Achsen der Zentralellipse, und für die Knicklast ist dann nur das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes maßgebend. Durch die Annahme einer Schneidenlagerung an einem Stabende oder an beiden wird jedoch die Symmetrie des Systems erheblich gestört. Die elastische Linie wird dann im allgemeinen eine Raumkurve sein und die Knicklast von beiden Hauptträgheitsmomenten des Querschnittes abhängen.

Eine sehr allgemeine Untersuchung der Stabilitätsbedingungen für die elastische Linie in Ebene und Raum verdankt man M. Born[1]). Da aber der Bornschen Arbeit nur der elastische Draht mit axialsymmetrischen Querschnitt zugrunde gelegt ist und die betrachteten Randbedingungen die Schneidenlagerung nicht enthalten, kann aus jenen Ergebnissen das Verhalten der hier behandelten Stäbe nicht abgeleitet werden.

Fallen die Schneiden in die Richtungen der Hauptachsen der Zentralellipse, so kann man die Knicksicherheit häufig schon auf Grund der bekannten für Spitzenlagerung und volle Einspannung aufgestellten Knickformeln beurteilen, es sei denn, daß die Gefahr einer Ausbiegung in beiden durch die Stabachse gelegten Hauptträgheitsebenen gleich groß wird. Dieser Fall tritt z. B. schon dann ein, wenn bei einem Stab mit axialsymmetrischem Querschnitt an jedem Ende Schneidenlagerung vorhanden ist und die Schneiden nicht parallel sind, oder wenn bei einem Stab, dessen Hauptträgheitsmomente sich wie 4 : 1 verhalten, beide Schneiden mit der kleinen Achse der Zentralellipse zusammenfallen. Wird die Knickgefahr durch die Entstehung einer räumlichen Elastica oder, was dasselbe bedeutet, durch das Zusammentreffen zweier gleich großer ebener Ausweichgefahren vergrößert?

Im Eisenbau kommt es nicht allzu selten vor, daß einzelne auf Druck beanspruchte Winkeleisen mittels Knotenblechen angeschlossen werden. Sind sie überdies an den Enden derart gekröpft, daß ein exzentrischer Angriff der Kraft vermieden wird, so kommt nur die Berechnung auf Knickung in Frage. Man hilft sich dann wohl bisweilen so, daß man den Stab als in Spitzen gelagert ansieht und, weil das kleinste Trägheitsmoment offenbar eine zu ungünstige, das größte eine zu günstige Knicklast ergeben würde, das Trägheitsmoment für eine zu den Schenkeln des Winkeleisens parallele Schwerachse in die Knickformel einsetzt. Eine befriedigendere Lösung der Aufgabe ist jedoch die, die Knotenbleche als »Schneiden« anzusehen, welche unter 45° zu den Hauptträgheitsachsen des Querschnittes stehen und entweder parallel oder senkrecht im Raume zu einander sind. Man mag aus diesen Beispielen ersehen, daß die Betrachtung der Schneidenlagerung nicht bloß theoretisches Interesse besitzt.

---

[1]) M. Born, »Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum unter verschiedenen Grenzbedingungen«. Preisschrift, Göttingen 1906.

1. Grundlagen der Elastizitätstheorie. Wir legen ein räumliches Koordinatensystem als Rechtssystem derart fest, daß die z Achse mit der Stabachse, der Ursprung mit einem Stabende, die x Achse mit der großen, die y Achse mit der kleinen Achse der Zentralellipse des einen Endquerschnittes im unverzerrten Zustande zusammenfallen. Die Stablänge bezeichnen wir mit l, die Komponenten der Biegung mit x und y, ihre Ableitungen nach z kürzehalber mit x', x'', y', y''. Außer diesem festen Achssystem legen wir in jeden Punkt der Stabachse ein bewegliches Achsensystem a, b, t, das vor Eintritt der Ausbiegung mit x, y, z parallel und gleichsinnig ist, nachher aber mit der Richtung der großen und kleinen Achse der Zentralellipse und der Tangente an die Elastica im betreffenden Querschnitt übereinstimmt. Die Richtungscosinusse der beweglichen Achsen gegen die festen seien allgemein durch das Schema

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ a \ldots & l_1 & m_1 & n_1 \\ b \ldots & l_2 & m_2 & n_2 \\ t \ldots & l_3 & m_3 & n_3 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben. Die neue Lage von a, b, t kann hervorgebracht werden durch eine Drehung um die z-Achse und eine darauf folgende Drehung um eine zur $x-y$-Ebene parallele Achse. Ist der Drehwinkel um die z-Achse f und nimmt man die ganze Formänderung als sehr klein an, so läßt sich unter Beschränkung auf Größen erster Kleinheitsordnung leicht zeigen, daß das obige Schema übergeht in das folgende

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ a \ldots & 1 & f & -x' \\ b \ldots & -f & 1 & -y' \\ t \ldots & x' & y' & 1 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Dann ergeben sich die Komponenten der Krümmung und der Drall des Stabes, bezogen auf a, b, t zu

$$\varkappa = -y'', \quad \varkappa' = x'', \quad \tau = f'\ [1]),$$

so daß nach der üblichen Näherungstheorie

$$-y'' = G/B, \quad x'' = G'/A, \quad f' = H/C \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

ist, wenn G und G' die Biegemomente um die a- und b-Achse, H das Drillungsmoment, B und A die betreffenden Biegesteifigkeiten, C die Verdrehungssteifigkeit bedeuten. Hierbei ist zufolge der Wahl der Achsen $A \geq B$. Es kommt jetzt nur darauf an, Ausdrücke für die Biegemomente und das Verdrehungsmoment zu finden.

2. Schneiden-Spitzenlagerung. Ist ein Stabende in Schneidenlagerung, das andere in Spitzenlagerung, so legen wir die Schneide in die $x-y$-Ebene. Sie schließt mit der x-Achse den Winkel φ ein, Abb. 1. Das ihr benachbarte Linienelement der Elastica muß in der Bewegungsebene E bleiben. Von hier aus kann sich die elastische Linie entweder nach einer rechtsgewundenen (I) oder nach einer linksgewundenen (II) Kurve der Spitze in $z = l$ nähern. Betrachten wir die Elastica in der Richtung des Pfeiles, so erkennen wir das System der äußeren Kräfte, unter welchen der Stab im Gleichgewichte stehen muß, Abb. 2. Bewirkt die Last P eine Ausbiegung nach der Raumkurve I bzw. II, so muß in der Einspannebene an der Schneide S ein Einspannmoment $\pm D$ hervorgerufen werden, welchem durch das Kräftepaar $\pm Kl$ Gleichgewicht gehalten wird, wenn l die Länge des Stabes ist.

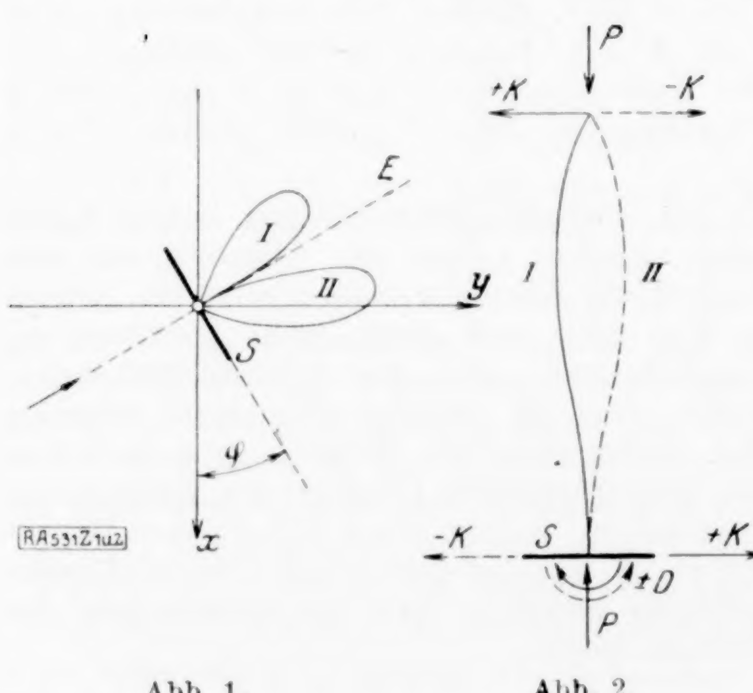


Abb. 1. Abb. 2.

Die in die Richtung der beweglichen Achse a fallende Komponente der Querkraft ergibt sich dann zu

$$N = \mp K(l_1 \cos\varphi + m_1 \sin\varphi) - P n_1,$$

[1]) Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, S. 443.

die in dieselbe Achse fallende Komponente des Momentenvektors ist

$$G = \pm K[(l-z)(l_1 \sin\varphi - m_1 \cos\varphi) + (x \sin\varphi - y\cos\varphi)\, n_1] - P(x m_1 - y l_1).$$

Die anderen Komponenten der Kraft und des Momentenvektors ergeben sich durch Vertauschung des Indices mit 2 und 3.

Führt man in diese Beziehungen die besonderen Werte für die Richtungscosinusse nach Gl. (2) ein und vernachlässigt die Glieder, welche Produkte von x, y, f, x', y' enthalten, so erhält man für die Komponenten der Kraft und des Momentenvektors die Werte

$$\begin{aligned} N &= \mp K(\cos\varphi + f\sin\varphi) + Px', & G &= \pm K(l-z)(\sin\varphi - f\cos\varphi) + Py, \\ N' &= \mp K(\sin\varphi - f\cos\varphi) + Py', & G' &= \pm K(l-z)(-\cos\varphi - f\sin\varphi) - Px, \\ T &= \mp K(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi) - P, & H &= \pm K[(l-z)(x'\sin\varphi - y'\cos\varphi) + (x\sin\varphi - y\cos\varphi)]' \end{aligned}$$

Würde man in diesen Ausdrücken noch diejenigen Glieder, welche x, y, f, x', y'. enthalten, gegen jene vernachlässigen, in welchen sie nicht vorkommen, so würden die Querkräfte N, N' und die Biegemomente G, G' von der Last P **unabhängig** sein, und da der Stab für $P = 0$ spannungsfrei sein soll, wären N, N', G, G' stets gleich Null und die Axialkraft wäre $T = -P$. Dies würde dem trivialen Fall entsprechen. Querkräfte und Biegemomente sind daher nur möglich, wenn man annimmt, daß K von der Größenordnung $P \cdot x/l$ ist. Dann kann man aber Glieder, welche Produkte von K und x, y, f, x', y' enthalten, vernachlässigen, und die obigen Werte können einfacher geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} N &= \mp K\cos\varphi + Px', & G &= \pm K(l-z)\sin\varphi + Py \\ N' &= \mp K\sin\varphi + Py', & G' &= \mp K(l-z)\cos\varphi - Px \\ T &= -P, & H &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (4).$$

Die Einführung der Momente in die Grundgleichungen (3) zeigt, daß der Verdrehungswinkel f überall Null ist, weil er an der Schneide verschwinden muß. Die Gleichungen der Elastica lauten:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \sin\alpha z + C_2\cos\alpha z \mp \frac{K}{P}(l-z)\cos\varphi \\ y &= C_3 \sin\beta z + C_4\cos\beta z \mp \frac{K}{P}(l-z)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5),$$

wenn $P/A = \alpha^2$ und $P/B = \beta^2$ gesetzt wird. Die fünf Festwerte C_{1-4} und K/P müssen fünf Randwerte erfüllen, und zwar muß an **beiden** Stabenden $x = y = 0$ und außerdem an der Schneide $(z = 0)$ $x'\cos\varphi + y'\sin\varphi = 0$ sein. Daher lautet die Knickbedingung

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \mp l\cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mp l\sin\varphi \\ \alpha\cos\varphi & 0 & \beta\sin\varphi & 0 & \pm 1 \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\beta l & \cos\beta l & 0 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &\sin\alpha l \sin\beta l - \alpha l\cos\alpha l \sin\beta l\cos^2\varphi \\ &- \beta l\sin\alpha l\cos\beta l\sin^2\varphi \quad . \; (6). \end{aligned}$$

Mit Benutzung der Knickbedingung findet man schließlich, wenn C eine neue **willkürliche**, aber sehr kleine Länge vorstellt und an Stelle von z die Entfernung vom spitzengelagerten Ende $\zeta = l - z$ eingeführt wird, die Gleichungen der Elastica

$$x = C\cos\varphi\left(\frac{\sin\alpha\zeta}{\sin\alpha l} - \frac{\zeta}{l}\right), \qquad y = C\sin\varphi\left(\frac{\sin\beta\zeta}{\sin\beta l} - \frac{\zeta}{l}\right) \quad . \; . \; . \; (7),$$

woraus in der Tat hervorgeht, daß sie im allgemeinen eine **Raumkurve** ist.

Gl. (6) gilt für alle Werte von φ, die Gleichungen (7) jedoch nur für von 0 und $\frac{\pi}{2}$ **verschiedene**. Setzt man nämlich schon in den Gleichungen, welche die Randbedingungen der Elastica beschreiben, $\varphi = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$, so zerfallen sie in zwei Gruppen, deren Determinanten nur für bestimmte Verhältnisse oder Hauptträgheitsmomente $J_{max} : J_{min} = \beta^2 : \alpha^2$ **gleichzeitig** verschwinden können. Andererseits erhält man aus Gl. (6) mit $\varphi = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ das **Produkt** jener Determinanten, nämlich

$$\sin\beta l(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l) \quad \text{bzw.} \quad \sin\alpha l(\sin\beta l - \beta l\cos\beta l).$$

Daher bleibt (6) immer gültig, während man in solchen Fällen die Gestalt der Elastica aus den Gleichungsgruppen, in welche die fünf Randbedingungen zerfallen, er-

mitteln muß. Man findet so: Liegt die Schneide in der Richtung einer Hauptträgheitsachse, so ist die Elastica im allgemeinen eine ebene Kurve, und zwar befindet sie sich in jener Hauptträgheitsebene, für welche die größere Knickgefahr besteht. Besondere Werte des Verhältnisses $J_{max} : J_{min}$ ermöglichen aber die Entstehung einer räumlichen Elastica, wobei die Ausweichungen in den Richtungen x und y von einander nicht abhängig sind. Ein solcher Fall liegt z. B. vor, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $J_{max} : J_{min} = 2{,}0457$ ist. Die erste Knicklast ergibt sich dann aus $\alpha l = \pi$, wobei gleichzeitig $\beta l = 4.493 \ldots$ sein muß, so daß

$$P = \pi^2 \frac{E J_{max}}{l^2} = 20{,}19 \frac{E J_{min}}{l^2},$$

und es zeigt sich, daß die Knickgefahr nicht vergrößert wird, wenn beide von einander unabhängigen Ausweichungen tatsächlich zustande kommen.

Das Verschwinden des Zeichens $(\pm)$ aus den Gleichungen (6) und (7) weist auf die Bedeutung der Kurven I und II in Abb. 1 hin. Die linksgewundene Kurve II bevorzugt gegenüber der rechtsgewundenen Kurve I die Ausbiegung in der Richtung y des kleineren Biegewiderstandes und entspricht darum der ersten Knicklast, I der zweiten Eulerlast. Für höhere Knicklasten treten sowohl links- wie auch rechtsgewundene Elastica auf, wobei der Winkel, den die beiden Linienelemente für $z = 0$ und $z = l$ im Sinne einer Links- bzw. Rechtsdrehung in der $x - y$ Projektion mit einander einschließen, immer größer wird.

Um einen Ueberblick über alle Knicklasten zu erhalten, betrachten wir zunächst den Fall der Axialsymmetrie, für welchen $\alpha = \beta$ wird. Die Knickbeanspruchung lautet dann

$$0 = \sin \alpha l (\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l),$$

ist also von φ unabhängig. Die Schneide liegt hier immer in einer Hauptträgheitsachse und die Knicklasten entsprechen den Wurzeln der beiden Gleichungen $\sin \alpha l = 0$ und $\operatorname{tg} \alpha b = \alpha l$. Die Elastica sind ebene Kurven und zwar liegen jene, welche der Knickbedingung $\sin \alpha l = 0$ entsprechen, in der Bewegungsebene, die anderen in der Einspannebene. Die Unabhängigkeit der Knicklast vom Winkel φ ist nicht auf den axialsymmetrischen Fall beschränkt. Man sieht leicht, daß Gl. (6) für jeden Wert von φ erfüllt wird, wenn $J_{max} : J_{min} = m^2 : n^2 \,(m, n = 1, 2, 3 \ldots)$ ist, weil dann stets $\beta l = m\pi$ und $\alpha l = n\pi$ zusammengehörige Werte sind. Aber auch wenn $J_{max} : J_{min}$ gleich wird dem Quadrate des Verhältnisses irgend welcher Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$, fällt der Winkel φ aus der Gl. (6) heraus.

Ist andererseits $J_{max} : J_{min}$ sehr groß, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, so entwickeln wir Gl. (6) nach Potenzen von αl und erhalten die Knickbedingung

$$0 = (\sin \beta l - \beta l \cos \beta l) \sin^2 \varphi - \frac{\alpha^2 l^2}{6} [\sin \beta l (1 - 3 \cos^2 \varphi) - \beta l \cos \beta l \sin^2 \varphi] + \ldots,$$

welche ausspricht, daß $\operatorname{tg} \beta l = \beta l$ sein muß, wenn $\varphi > 0$ ist. Ist jedoch $\varphi = 0$, so muß $\sin \beta l = 0$ werden. Nur in diesem Falle findet eine Drehung des Stabendes $z = 0$ um die Schneide statt, sonst wirkt sie wie eine volle Einspannung. Die Elastica liegt in diesem Grenzfalle stets ganz in der $y - z$-Ebene.

Man kann zu allen möglichen Werten der Knicklast gelangen, wenn man aus (6)

$$\sin^2 \varphi = \frac{\alpha l \cos \alpha l \sin \beta l - \sin \alpha l \sin \beta l}{\alpha l \cos \alpha l \sin \beta l - \beta l \sin \alpha l \cos \beta l} \quad \ldots \ldots \quad (6\,a)$$

bildet. Betrachtet man φ als Funktion von P so ist φ im Intervall $0, \frac{\pi}{2}$ eindeutig. Aber nur solche Werte von P sind möglich, für welche die rechte Seite in Gl. (6a) zwischen 0 und 1 liegt. Als Einheit der Knicklast kann $P_{00} = \pi^2 \frac{E J_{min}}{l^2}$ $(\beta l = \pi)$ [1]) angesehen werden. Abb. 3 stellt für einige Verhältnisse $J_{min} : J_{max}$ den Verlauf der Kurven $(P\varphi)$ für die erste Knicklast dar, und zwar entspricht $(1 : 3 \cdot 76)$ den gleichschenkeligen, $(1 : 5 \cdot 98)$ und $(1 : 9 \cdot 56)$ den ungleichschenkeligen Winkeleisen, deren Schenkellängen sich wie 2 : 3 bzw. wie 1 : 2 verhalten.

[1]) Die Bezeichnung P_{00} für die kleinste Knicklast, deren ein Stab von bestimmter Länge fähig ist, wurde mit Rücksicht auf die doppelte Schneidenlagerung und an einem Ende eingespannte Stäbe — siehe die folgenden Abschnitte 3 und 4 — gewählt.

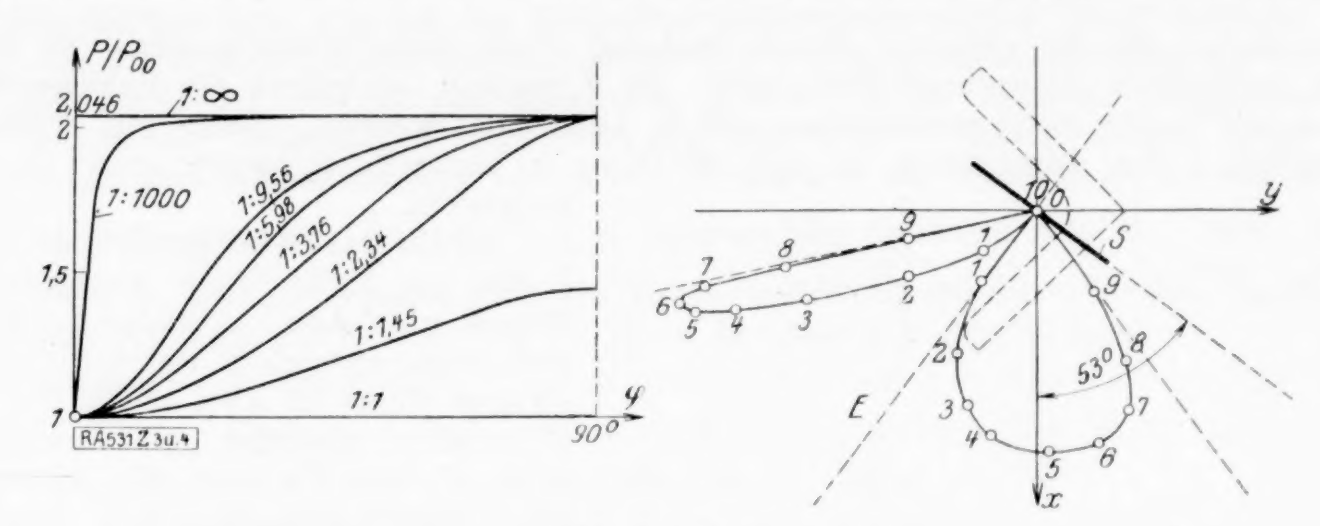


Abb. 3 und 4.

Abb. 4 zeigt in kotierter Projektion auf die $x-y$-Ebene die Elastica der **ersten** und **zweiten** Knicklast für ein gleichschenkliges Winkeleisen und $\varphi = 53^0$. Die Tangente an das Linienelement $z = l$ ($\zeta = 0$) ergibt sich aus Gl. (7)

$$\operatorname{tg} \lambda = \left(\frac{\dfrac{dy}{d\zeta}}{\dfrac{dx}{d\zeta}} \right)_{\zeta=0} = \operatorname{tg} \varphi \, \frac{\sin \alpha l}{\sin \beta l} \cdot \frac{\beta l - \sin \beta l}{\alpha l - \sin \alpha l} \, .$$

3. Doppelte Schneidenlagerung. Sind beide Stabenden in Schneidenlagerung, so möge der Winkel der in der $x-y$ Ebene liegenden Schneide S_1 gegen die x-Achse wieder mit φ bezeichnet werden, der Winkel der Schneide S_2 am anderen Ende $z = l$ des Stabes gegen die $x-z$-Ebene mit ψ. Ueberdies führen wir noch den Winkel

$$\vartheta = \psi - \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

ein. Man kann jedenfalls alle möglichen Lagen der beiden Schneiden gegen die Hauptträgheitsachsen des Querschnittes erhalten, wenn man die Grenzen festsetzt

$$-\frac{\pi}{2} \leq (\varphi, \psi) \leq +\frac{\pi}{2}, \quad \text{sodaß} \quad -\pi \leq \vartheta \leq +\pi \text{ ist.}$$

Für positive ϑ sind in Abb. 5 die drei möglichen Lagen der Schneiden gezeichnet. Sie können nämlich in den **gleichen** oder in **verschiedenen** Quadranten liegen und im letzteren Falle kann ϑ entweder $< \frac{\pi}{2}$ oder $> \frac{\pi}{2}$ sein, so daß die x Achse einmal in den kleineren von den Schneiden eingeschlossenen Winkel und einmal in den größeren Winkel fällt. Mit E_1 und E_2 sind die Bewegungsebenen der beiden Schneiden bezeichnet. Je nachdem die Elastica sich in Form einer **rechts-** oder einer **linksgewundenen** Kurve aus E_1 ($z = 0$) in die Ebene E_2 ($z = l$) begibt, bezeichnen wir sie mit I oder II.

In den drei in Abb. 5 gezeichneten Lagen der Schneiden ist S_2 stets im ersten Quadranten. I bevorzugt im Vergleiche zu II die Ausbiegung in der Richtung y. Diesen drei Lagen können drei weitere gegenüber gestellt werden, für welche ϑ stets **negativ** ist und stets S_1 im ersten Quadranten liegt. Legt man durch S_1, z und S_2 Schraubenflächen, deren Erzeugende von S_1 bis S_2 höchstens 180° zurücklegen, so bilden die in Abb. 5 gezeichneten Fälle Rechtsschrauben, die zuletzt genannten Linksschrauben. Sie

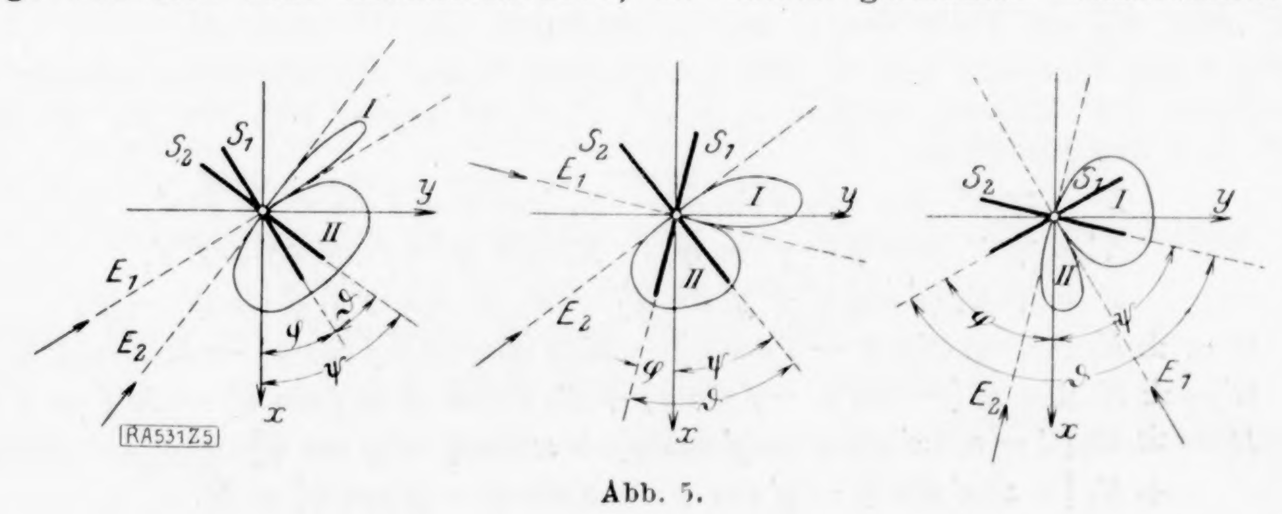


Abb. 5.

können daher in die ersteren durch Drehung nicht übergeführt werden, so daß insgesamt sechs Fälle zu unterscheiden sind. Ist ϑ negativ, so mögen die linksgewundenen Elastica mit I, die rechtsgewundenen mit II bezeichnet werden. Dann gilt wieder, daß die Kurven I die Ausbiegung in der Richtung y bevorzugen, wenn man sie mit II vergleicht.

Abb. 6a.

Abb. 6b.

Ueber das Gleichgewicht der äußeren Kräfte im Falle einer Ausbiegung des Stabes gibt Abb. 6a und 6b Aufschluß, und zwar entspricht 6a der ersten und zweiten Figur in Abb. 5, 6b der dritten. Die neben einander gestellten Bilder in Abb. 6a und 6b sind die Ansichten in den Pfeilrichtungen der Bewegungsebenen E_1 und E_2. Die in den Einspannebenen (Bildebenen) wirkenden Einspannmomente $\pm D_1$ und D_2 (+ entspricht der Kurve I, — der Kurve II in Abb. 5) haben zur Folge, daß parallel zur $x - y$-Ebene Auflagerreaktionen $\pm K_1 l = \pm D_1$ und $K_2 l = D_2$ auftreten müssen. Aehnliche Darstellungen der äußeren Kräfte können für Schneidenlagen gezeichnet werden, für welche ϑ negativ ist. Zu den in Abb. 6 gezeichneten Kräften treten noch hinzu die als Druck positiv gerechnete Belastung P in der Richtung der z-Achse und ein Drillungsmoment M, welches mit positivem Drehsinn angenommen werden möge. Da nämlich eine Schneide geeignet erscheint, ein Drillungsmoment aufzunehmen, kann das Auftreten einer solchen Auflagerreaktion bei einer räumlichen Elastika nicht von vornherein außer Acht gelassen werden.

Wir berechnen nun die Kräfte und Momentenvektoren, welche in den Achsenrichtungen des beweglichen Druckants a, b, t auftreten und erhalten für die Querkraft in Richtung der Achse a mit Benutznng von (1)

$$N = \mp K_1 \cos \varphi \, l_1 \mp K_1 \sin \varphi \, m_1 - K_2 \cos \psi \, l_1 - K_2 \sin \psi \, m_1 - P n_1$$

und für den Momentenvektor in derselben Richtung

$$\begin{aligned} G = & \pm K_1 [(l - z)(\sin \varphi \, l_1 - \cos \varphi \, m_1) + (x \sin \varphi - y \cos \varphi) n_1] \\ & + K_2 [- z (\sin \psi \, l_1 - \cos \psi \, m_1) + (x \sin \psi - y \cos \psi) n_1] + M n_1 - P (x m_1 - y l_1). \end{aligned}$$

Die Gleichungen gelten für alle früher angegebenen sechs besonderen Lagen der Schneiden zum Stab, und zwar mit dem oberen Zeichen bei K_1 für die Elastica I, mit dem unteren für II, wenn an den erläuterten Bezeichnungen festgehalten wird. Die Komponenten der Kraft und des Momentes in den beiden anderen Richtungen b und t erhält man, wenn man $l_{2,3}$, $m_{2,3}$, $n_{2,3}$ an Stelle von l_1, m_1, n_1 einführt.

Führt man nunmehr aus (2) die betreffenden Werte ein und vernachlässigt zugleich alle Produkte der kleinen Größen x, y, x', y', f, so ergibt sich für die Komponenten der Kraft und des Momentes

$$\begin{aligned} N &= \mp K_1 (\cos \varphi + f \sin \varphi) - K_2 (\cos \psi + f \sin \psi) + P x', \\ N' &= \mp K_1 (\sin \varphi - f \cos \varphi) - K_2 (\sin \psi - f \cos \psi) + P y', \\ T &= \mp K_1 (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) - K_2 (x' \cos \psi + y' \sin \psi) - P; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \pm K_1 (l - z)(\sin \varphi - f \cos \varphi) - K_2 z (\sin \psi - f \cos \psi) - M x' + P y, \\ G' &= \pm K_1 (l - z)(- \cos \varphi - f \sin \varphi) + K_2 x (\cos \psi + f \sin \psi) - M y' - P x, \\ H &= \pm K_1 [(l - z)(x' \sin \varphi - y' \cos \varphi) + x \sin \varphi - y \cos \varphi] \\ & \quad + K_2 [- z (x' \sin \psi - y' \cos \psi) + x \sin \psi - y \cos \psi] + M. \end{aligned}$$

Wir können hier wie bei der Schneiden-Spitzenlagerung zu einer weiteren Vereinfachung der Ausdrücke für die Biegemomente und das Drillungsmoment durch die Ueberlegung gelangen, daß sowohl die Querkräfte N und N' als auch die Komponenten des Momentes von der Belastung P unabhängig und $T = -P$ sein müßte, wenn K_1, K_2 und M von gleicher Größenordnung wären wie P. Nehmen wir aber an, K_1, K_2 und M wären von der Größenordnung $P\frac{x}{l}$ bzw. Px, so können die Produkte wie $K_1 f$ bzw. Mx' gestrichen werden, und es ergeben sich die Kraft- und Momentenkomponenten in bezüglich ihrer Größenordnung aus homogenen Gliedern bestehenden Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} N &= \mp K_1 \cos\varphi - K_2 \cos\psi + Px', & G &= \pm K_1 (l-z)\sin\varphi - K_2 z \sin\psi + Py, \\ N' &= \mp K_1 \sin\varphi - K_2 \sin\psi + Py', & G' &= \mp K_1 (l-z)\cos\varphi + K_2 z\cos\psi - Px, \\ T &= -P, & H &= M. \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Aus der letzten der Gl. (3) folgt dann, daß f eine lineare Funktion von z sein muß, und weil f sowohl für $z = 0$ als auch für $z = l$ verschwinden muß, so tritt überhaupt keine Drillung ein.

Aus der ersten und zweiten der Gl. (3) folgt unmittelbar die allgemeine Gestalt der Elastica in der Form

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \sin\alpha z + C_2 \cos\alpha z \mp \frac{K_1}{P}(l-z)\cos\varphi + \frac{K_2}{P} z\cos\psi \\ y &= C_2 \sin\beta z + C_4 \cos\beta z \mp \frac{K_1}{P}(l-z)\sin\varphi + \frac{K_2}{P} z \sin\psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (10).$$

Es bestehen sechs Randbedingungen für $z = 0$ bzw. $z = l$, nämlich $x = y = 0$ und mit Rücksicht auf die Schneidenlagerung $x'\cos\varphi + y'\sin\varphi = 0$ bzw. $x'\cos\psi + y'\sin\psi = 0$. Sie bestimmen das Verhältnis zwischen den sechs Festwerten C_{1-4}, $\frac{K_1}{P}$ und $\frac{K_2}{P}$, sofern die Knickbedingung erfüllt ist, nämlich wenn

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \mp l\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mp l \sin\varphi & 0 \\ \alpha\cos\varphi & 0 & \beta\sin\varphi & 0 & \pm 1 & \cos\vartheta \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & 0 & 0 & 0 & l\cos\psi \\ 0 & 0 & \sin\beta l & \cos\beta l & 0 & l\sin\psi \\ \alpha\cos\alpha l\cos\psi & -\alpha\sin\alpha l\cos\psi & \beta\cos\beta l\sin\psi & -\beta\sin\beta l\sin\psi & \pm\cos\vartheta & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \alpha l \sin\beta l \cos^2\varphi \cos^2\psi (2 - 2\cos\alpha l - \alpha l \sin\alpha l) \\ &+ \beta l \sin\alpha l \sin^2\varphi \sin^2\psi (2 - 2\cos\beta l - \beta l \sin\beta l) \\ &+ (\sin^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi)(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l)(\sin\beta l - \beta l\cos\beta l) \\ &- 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi(\alpha l - \sin\alpha l)(\beta l - \sin\beta l) \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Die Knickbedingung kann auch in die Form

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l)(\sin\beta l - \beta l \cos\beta l) - \cos^2\vartheta(\alpha l - \sin\alpha l)(\beta l - \sin\beta l) \\ &- \cos^2\varphi\cos^2\psi[\alpha^2 l^2 \sin\alpha l\sin\beta l + \alpha\beta l^2\cos\alpha l\cos\beta l - \alpha\beta l^2 \\ &+ \beta l\sin\alpha l(1-\cos\beta l) - \alpha l \sin\beta l(1-\cos\alpha l)] - \sin^2\varphi\sin^2\psi[\beta^2 l^2\sin\alpha l\sin\beta l \\ &+ \alpha\beta l^2\cos\alpha l\cos\beta l - \alpha\beta l^2 - \beta l\sin\alpha l(1-\cos\beta l) + \alpha l\sin\beta l(1-\cos\alpha l)] \end{aligned}\right\} \quad (11\,a)$$

umgewandelt werden, welche für manche Fälle rascher zum Ziele führt. Wie bei der Schneiden-Spitzenlagerung ist die Knickbedingung (11) bzw. (11 a) für jede Schneidenstellung giltig, die allgemeinen Gleichungen der Elastica jedoch nur für solche Stellungen, für welche die sechs Randbedingungsgleichungen nicht in zwei von einander unabhängige Gruppen zerfallen. Diese allgemeinen Gleichungen der Elastica lauten, wenn C eine willkürliche, sehr kleine Länge bedeutet [vergl. die Gl. (12) auf S. 302]:

Für axialsymmetrische Querschnitte folgt aus (11 a) die Knickbedingung

$$0 = (\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l)^2 - \cos^2\vartheta(\alpha l - \sin\alpha l)^2,$$

aus welcher für $\vartheta = 0$ (Schneiden parallel zu einander)

$$0 = \alpha l \sin\alpha l (2 - 2\cos\alpha l - \alpha l \sin\alpha l)$$

hervorgeht. Demnach ist die kleinste Knicklast $P_{00} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ und entspricht einer

$$
\left.\begin{aligned}
x = C \Big\{ & [\sin \beta l (\cos \psi - \cos \alpha l \cos \vartheta \cos \varphi) + \beta l \sin \varphi (\cos \alpha l \cos \varphi \sin \psi \\
& - \cos \beta l \sin \varphi \cos \psi)] \sin \alpha z + [\sin \alpha l \sin \beta l \cos \vartheta - \alpha l \sin \beta l \cos \varphi \cos \psi \\
& - \beta l \sin \alpha l \sin \varphi \sin \psi] \cos \varphi \left(\cos \alpha z - 1 + \frac{z}{l}\right) - [\sin \alpha l \sin \beta l \\
& - \alpha l \cos \alpha l \sin \beta l \cos^2 \varphi - \beta l \sin \alpha l \cos \beta l \sin^2 \varphi] \cos \psi \cdot \frac{z}{l} \Big\} \\
y = C \Big\{ & [\sin \alpha l (\sin \psi - \cos \beta l \cos \vartheta \sin \varphi) + \alpha l \cos \varphi (\cos \beta l \sin \varphi \cos \psi \\
& - \cos \alpha l \cos \varphi \cos \psi)] \sin \beta z + [\sin \alpha l \sin \beta l \cos \vartheta - \alpha l \sin \beta l \cos \varphi \cos \psi \\
& - \beta l \sin \alpha l \sin \varphi \sin \psi] \sin \varphi \left(\cos \beta z - 1 + \frac{z}{l}\right) - [\sin \alpha l \sin \beta l \\
& - \alpha l \cos \alpha l \sin \beta l \cos^2 \varphi - \beta l \sin \alpha l \cos \beta l \sin^2 \varphi] \sin \psi \, \frac{z}{l} \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (12).
$$

ebenen Elastica. Die zweite Knicklast ergibt sich aus $\alpha l = 2\pi$ und ist im Allgemeinen eine Raumkurve, deren Gleichungen lauten

$$
\left.\begin{aligned} x &= C (\cos \alpha z - 1) \\ y &= C_3 \sin \alpha z \end{aligned}\right\} \quad (C \text{ und } C_3 \text{ von einander unabhängige kleine Längen})
$$

und für $C = C_3$ eine gemeine Schraubenlinie ist. Denn für $\varphi = \psi = \vartheta = 0$ tritt der Zerfall der Randbedingungsgleichungen in zwei Gruppen ein, deren Determinanten $\sin \alpha l$ und $\alpha l (2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l)$ nur dann gleichzeitig verschwinden können, wenn αl ein gerades Vielfaches von π ist. Der ersten Gruppe entspricht eine ebene Elastica in der Bewegungsebene der zwei parallelen Schneiden, der zweiten eine ebene Elastica in der Einspannungsebene. Die Gleichung

$$
0 = 2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l = 4 \sin \frac{\alpha l}{2} \left(\sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\alpha l}{2} \right)
$$

ist zugleich die hinreichende Bedingung für den Knickfall bei einem an beiden Enden vollkommen eingespannten Stab. Ihre Wurzeln lauten der Reihe nach $0, 2\pi, 8 \cdot 9868 \ldots$, $4\pi, 15 \cdot 4505 \ldots$, $6\pi, 21 \cdot 8090 \ldots$ usw.

Daher ergibt sich die dritte Knicklast axialsymmetrischer Stäbe mit parallelen Schneiden aus $\alpha l = 8 \cdot 9869 \ldots$, die vierte aus $\alpha l = 3\pi$, und beide entsprechen ebenen Elasticis. Die der dritten Knicklast entsprechende liegt in der Einspannebene, die andere in der Bewegungsebene. Erst die fünfte, aus $\alpha l = 4\pi$ entspringende Knicklast führt wieder zu einer Elastica, welche eine Raumkurve sein kann.

Setzen wir im axialsymmetrischen Fall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir die Knickbedingung

$$
0 = (\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l)^2 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \alpha l = \alpha l,
$$

deren Wurzeln $0, 4 \cdot 4934 \ldots$, $7 \cdot 7252 \ldots$, $10 \cdot 9045 \ldots$ Durch Zufall der Randbedingungsgleichungen entstehen zwei gleichlautende Determinanten, deren Quadrat die obige Knickbedingung ist. Mit $\zeta = z - l$ lauten dann die Gleichungen der Elastica

$$
x = C (\alpha \zeta \cos \alpha l - \sin \alpha \zeta), \qquad y = C' (\alpha z \sin \alpha l - \alpha l \sin \alpha z).
$$

C und C' sind von einander unabhängige, willkürliche kleine Längen. Demnach sind für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sowohl ebene wie räumliche Elastica bei der gleichen Knicklast möglich.

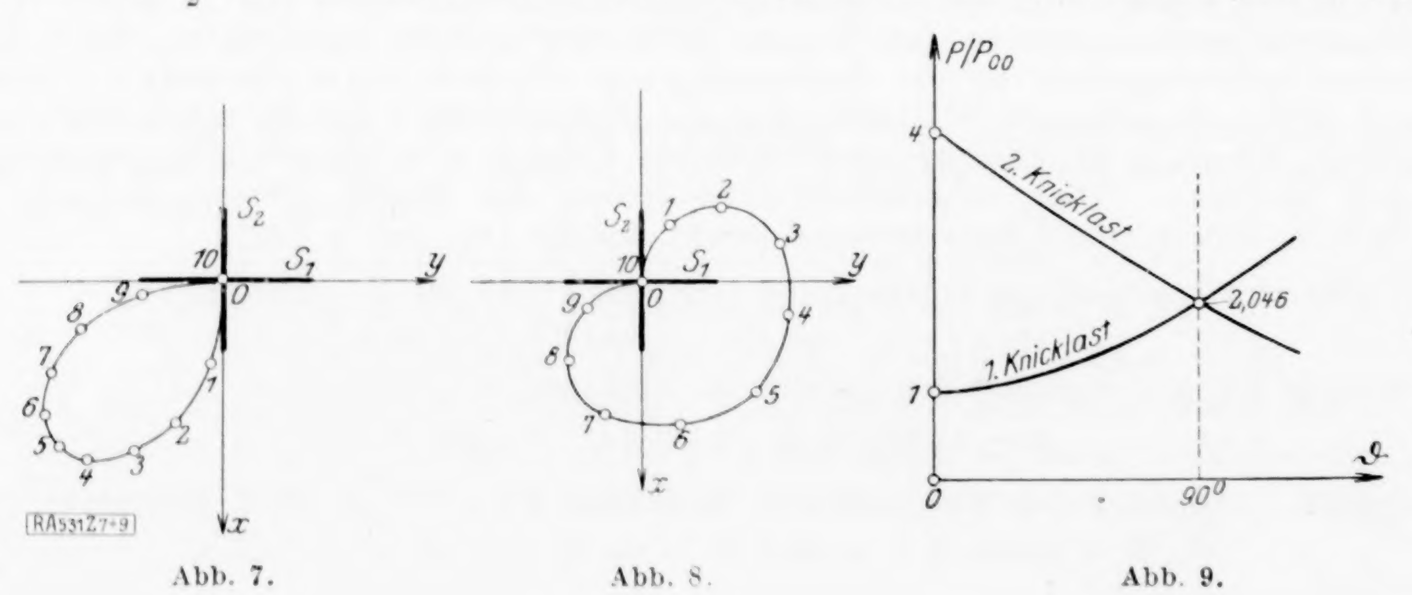


Abb. 7. Abb. 8. Abb. 9.

Abb. 7 zeigt die Elaztica für $\alpha l = 4 \cdot 493 \ldots$ Abb. 8 diejenige für $\alpha l = 7 \cdot 725 \ldots$ in kotierter Projektion auf die $x - y$-Ebene für $l = 10$. C und C' sind so gewählt, daß gleiche größte Ausweichungen in der x- und y Richtung entstehen.

$\alpha l = 4 \cdot 493 \ldots$ ist dabei eine doppelte Wurzel der Knickbedingung, der ihr entsprechende Wert der Knicklast nämlich

$$P_{0, \frac{\pi}{2}} = 20 \cdot 19 \frac{E J}{l^2},$$

somit als erste und zweite Knicklast anzusehen. In der Tat ergibt sich, wenn P als Funktion von ϑ dargestellt wird, in $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ein stetiger Uebergang der ersten in die zweite Knicklast bzw. ein Schnittpunkt zweier symmetrisch liegender Kurven (Abb. 9).

Dem axialsymmetrischen Falle entgegengesetzt ist die Ausartung $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$. Für diesen Grenzfall ergibt sich durch Entwicklung des $\sin \alpha l$ und $\cos \alpha l$ in Potenzreihen aus (11) die Knickbedingung

$$\begin{aligned}
0 &= \beta l (2 - 2\cos\beta l - \beta l \sin\beta l) \sin^2\varphi \sin^2\psi + \frac{\alpha^2 \beta^2}{6} [- \beta l (2 - 2\cos\beta l - \beta l \sin\beta l) \sin^2\varphi \sin^2\psi \\
&+ 2 (\sin\beta l - \beta l \cos\beta l)(\sin^2\varphi \cos^2\psi + \cos^2\varphi \sin^2\psi) - (\beta l - \sin\beta l)\, 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi] \\
&+ \frac{\alpha^4 l^4}{120} [10 \sin\beta l \cos^2\psi \cos^2\varphi + \beta l (2 - 2\cos\beta l - \beta l \sin\beta l) \sin^2\varphi \sin^2\psi \\
&- 4 (\sin\beta l - \beta l \cos\beta l)(\sin^2\varphi \cos^2\psi + \cos^3\varphi \sin^2\psi) + (\beta l - \sin\beta l)\, 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi] \\
&+ \ldots,
\end{aligned}$$

aus welcher unmittelbar abgelesen werden kann: Ist sowohl φ als auch ψ von Null verschieden, so hängt die Knicklast nur vom ersten Gliede ab, daher $\beta l = 2\pi$ die kleinste von Null verschiedene Wurzel und der Stab verhält sich in jeder Beziehung wie ein an beiden Enden eingespannter Stab. Ist entweder φ oder $\psi = 0$, so hängt die Knicklast nur vom zweiten Gliede ab, ergibt sich aus der Gleichung $\sin \beta l - \beta l \cos \beta l = 0$ und der Stab verhält sich so, wie ein an einem Ende eingespannter, am anderen frei drehbarer Stab. Ist endlich sowohl φ als auch $\psi = 0$, so entscheidet das dritte Glied, und zwar muß dann $\sin \beta l = 0$ werden, was doppelter Spitzenlagerung gleichkommt.

Liegt der Wert des Bruches $\frac{J_{min}}{J_{max}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ innerhalb seiner Grenzen 1 und 0, so kann man die Knicklast P als periodische Funktion von φ und ψ als Fläche über der φ-, ψ Ebene darstellen (Abb. 10). Ausgezeichnete Lagen der Schneiden zu einander bzw. zu den Hauptträgheitsachsen sind dann:

Schneiden parallel zu einander (Gerade 5 — 0 — 1), Schneiden senkrecht zu einander (2 — 4 und 6 — 8), Schneiden symmetrisch zu den Hauptträgheitsachsen (Gerade 7 — 0 — 3), Schneiden symmetrisch zu den Winkelhalbierenden der Hauptträgheitsachsen (Gerade 2 — 8 und 4 — 6). Eine Schneide fällt mit einer Hauptträgheitsachse zusammen (Geraden 1 — 2 — 3, 4 — 0 — 8, 5 — 6 — 7, 7 — 8 — 1, 6 — 0 — 2 und 3 — 4 — 5).

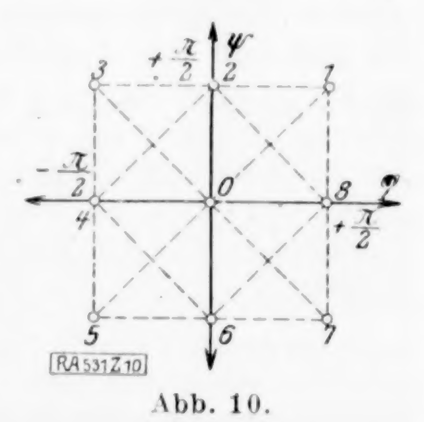


Abb. 10.

Durch Einführung dieser Beziehungen in Gl. (11) oder (11a) gelangt man zu Gleichungen zweiten oder vierten Grades für $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ bzw. $\sin\psi$, $\sin 2\psi$, aus welchen dieser Winkel, dadurch berechnet werden kann, daß man für P versuchsweise verschiedene Werte einsetzt. Jedem Wert von P entspricht ein Wertepaar (α, β), aber nicht jedem Wertepaar (α, β) ein reeller Schneidenwinkel, d. h. die oberhalb der $\varphi - \psi$-Ebene errichtete P-Fläche der zweiten Knicklast schließt sich im allgemeinen an diejenige der ersten Knicklast nicht stetig an.

Auf diese Weise wurden für mehrere Verhältnisse der Hauptträgheitsmomente die Applikaten der P-Fläche, welche der ersten Knicklast entspricht, bestimmt und durch Kartonmodelle dargestellt, Abb. 11, 12, 13. Man hat sich die Knicklastfläche als eine stetig gekrümmte Fläche über den unter 45^0 und 90^0 gegen einander geneigt stehenden, aufrechten Rippenflächen ausgespannt zu denken. Ueberall ist nur die Hälfte des Elementargebietes $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ für $\psi = 0$ bis $+ \frac{\pi}{2}$ dargestellt. Die andere

Hälfte ist kongruent und um 180° gegen die erstere verdeht. Für jedes Verhältnis der Hauptträgheitsmomente ist $P_{00} = \pi^2 \frac{E J_{\min}}{l^2}$ die kleinste mögliche Knicklast und entspricht der Schneidenstellung $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Daher kann $P_{00} = 1$ als Vergleichsmaß dienen. Ein solcher Maßstab ist im Hindergrunde dieser Bilder zu sehen.

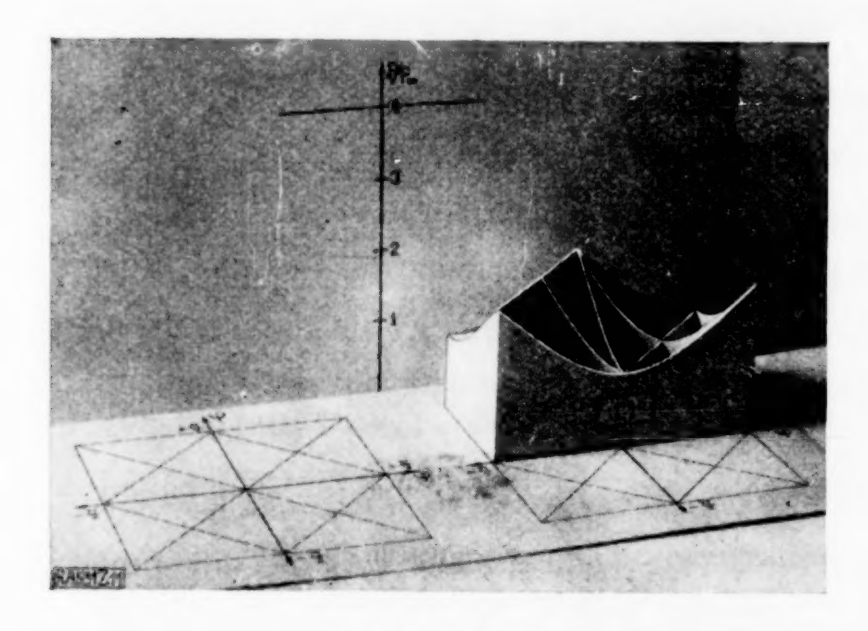


Abb. 11.

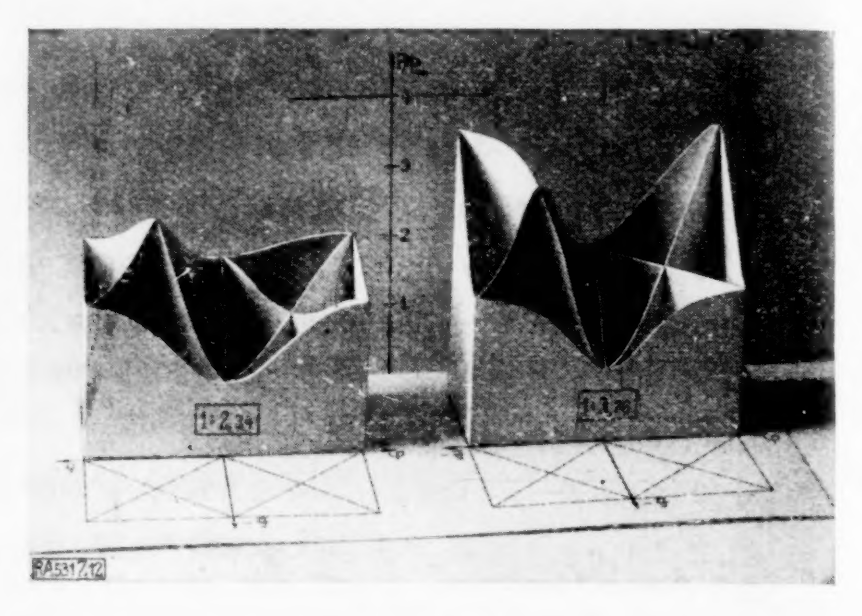


Abb. 12.

Die Bilder lassen erkennen, in welcher Weise die Fläche der ersten Knicklast sich verändert, wenn $J_{\min}/J_{\max}$ von 1 gegen Null abnimmt. In Abb. 11 sieht man die von $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$ bis $\varphi = 0$, $\psi = +\frac{\pi}{2}$ reichende Kante (eine gleiche Kante geht parallel zu ihr von $\varphi = 0$, $\psi = -\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, längs welcher die erste Knicklast mit der zweiten für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zusammenhängt, wenn $J_{\min}/J_{\max} = 1$ ist.

Die Applikate des Mittelpunktes im Grundquadrat = 1 und die der vier Halbierungspunkte der Quadratseiten = 2 · 0457 . . . ändern ihre Länge nicht. Am raschesten wachsen im Anfange die Applikaten an den Endpunkten der Diagonalen, doch ist der Vorsprung für $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $\psi = +\frac{\pi}{4}$ (Schneiden unter 45° zu den Hauptträgheitsachsen und senkrecht zu einander) groß genug, um für $J_{\min} : J_{\max} = 1 : 2 \cdot 34$ die höchste Knicklast und zwar $P/P_{00} = 2 \cdot 925$ an dieser Stelle erscheinen zu lassen (Abb. 12 linke Hälfte des linken Modelles). Für die Verhältnisse der gleichschenkeligen Winkeleisen (Abb. 12, rechtes Modell, $J_{\min} : J_{\max} = 1 : 3 \cdot 76$) sind die Eckpunkte bereits auf 3 · 76 gewachsen, es bestehen dort ziemlich scharfe Grate der Richtung $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ nach $\left(+\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ die dazu parallelen Kartonflächen der Verbindungslinien 2 bis 8 und 4 bis 6 in Abb. 10 sind nach oben nahezu geradlinig begrenzt und das in Abb. 11 sichtbare Tal ist verschwunden. Für ungleichschenkelige Winkeleisen mit einen Verhältnis 1 : 2 der Schenkellängen (Abb. 13, linkes Modell) haben die Eckpunkte ihre größte Höhe = 4 längst erreicht. Schließlich entsteht ein Körper (Abb. 13, rechtes Modell, $J_{\min} : J_{\max} = 1 : 1000$ als Repräsentant des Grenzfalles $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$) mit Hochplateaus, welche durch zwei Schluchten mit der Sohle im Niveau 2,0457 . . .

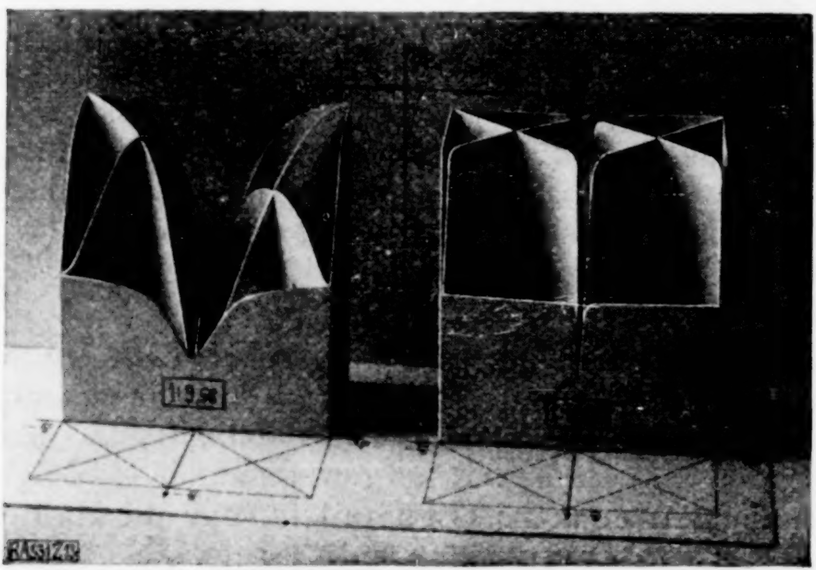


Abb. 13.

durchschnitten werden und außerdem in der Mitte einen tiefen Trichter bis zum Niveau 1 hinab aufweisen.

In den Abb. 14 bis 19 sind diese Körper durch Schichtenlinien dargestellt.

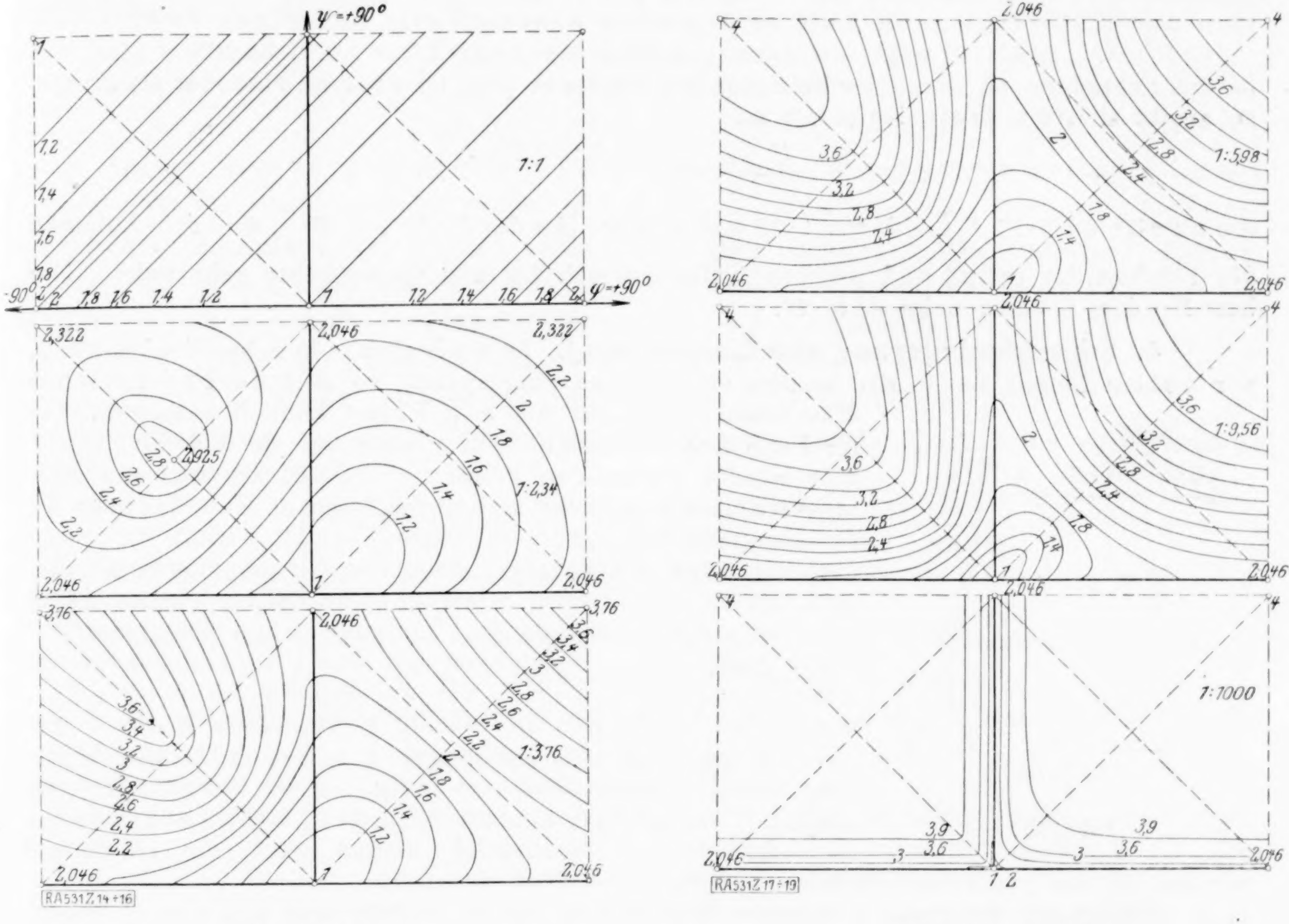


Abb. 14, 15, 16. Abb. 17, 18, 19.

Die erste Knicklast für den axialsymmetrischen Fall und für den Fall paralleler Schneiden bei **gleichschenkeligen** Winkeleisen lassen sich ziemlich gut durch Hyperbeln darstellen. Daraus entspringt eine einfache Konstruktion der Knicklast für diese beiden besonderen Fälle (Abb. 20). Es verhält sich $\overline{23} : \overline{13} = \vartheta$ (bzw. φ) : 90^0. Dann ist $\overline{02}$ die ϑ bzw. φ zugeordnete Knicklast. Die Konstruktion ist für axialsymmetrische Stäbe mindestens auf 3 · 4 vH für gleichschenkelige Winkeleisen mit parallelen Schneiden mindestens auf 2 vH genau.

Es seien hier noch einige Ergebnisse der Untersuchung doppelter Schneidenlagerung zusammengestellt.

Würde man bei einem gleichschenkeligen Winkeleisen mit parallelen Schneiden $\varphi = \psi = 45^0$, welches der häufigste Fall ist, Spitzenlagerung annehmen und an Stelle

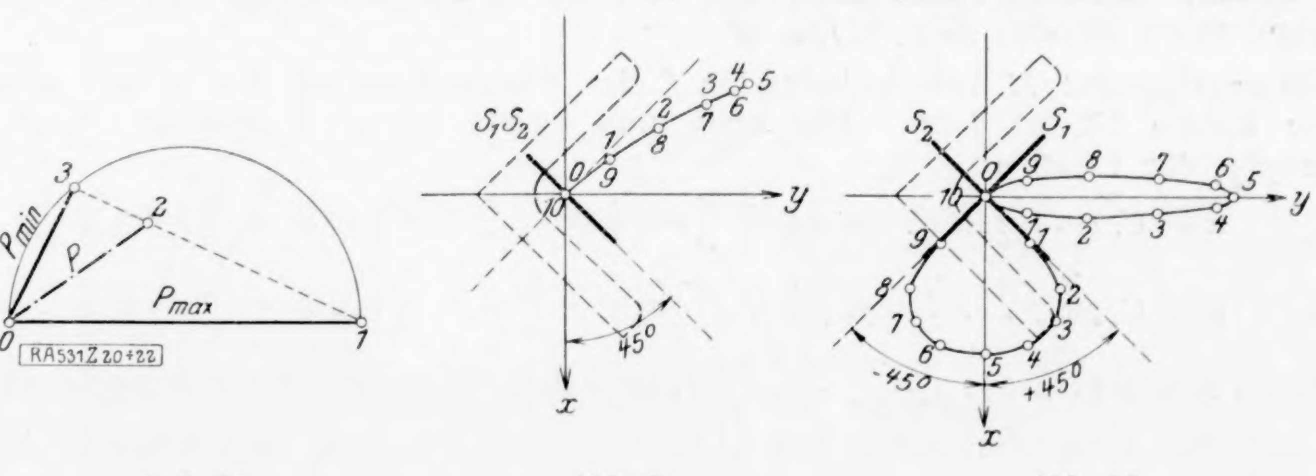


Abb. 20. Abb. 21. Abb. 22.

der genauen Rechnung die Knicklast mittels der Formel $\pi^2 \frac{E J_{45}}{l^2}$ abschätzen, wenn J_{45} das Trägheitsmoment des Querschnittes bezüglich der zu den Schneiden parallelen Schwerachse vorstellt, so würde man eine um 13 vH zu große Knicklast erhalten. Die Konstruktion der Knicklast nach Abb. 20 ergibt in diesem Falle nur einen Fehler von $-0 \cdot 3$ vH. Abb. 21 zeigt die dazu gehörige elastische Linie im Grundriß. Sind die beiden Schneiden zu den Schenkeln des Winkeleisens parallel aber zu einander senkrecht, so ergibt sich die erste Knicklast zu

$$P_{-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}} = 3 \cdot 29\, P_{00}\,,$$

die zweite zu $3 \cdot 87\, P_{00}$, also nur $1 \cdot 18$ mal größer. An der Stelle $\varphi = \mp \frac{\pi}{4}$, $\psi = \pm \frac{\pi}{4}$ kommen die Flächen der ersten und zweiten Knicklast sich für alle Querschnitte sehr nahe. Die betreffenden Elastica zeigt Abb. 22.

4. Schneidenlagerung und Einspannung. Ist ein Stabende in Schneidenlagerung, wir wählen hierzu $z = 0$, das andere vollkommen eingespannt, so muß die Projektion der elastischen Linie auf die x-y Ebene ähnlich aussehen, wie im Falle der Schneiden-Spitzenlagerung, so daß wir Abb. 1 hier wieder verwenden können. Zu den notwendigen Auflagerreaktionen gelangt man durch folgende Ueberlegung: In der Einspannebene (Abb. 23, linke Ansicht) wirken an jedem Stabende einander entgegen drehende Einspannmomente, die sich jedoch nicht völlig Gleichgewicht halten können, weil nur das untere Stabende eine Schneide trägt, die Symmetrie somit gestört ist. Bezeichnen wir das Einspannmoment am oberen Stabende mit $\pm D$, das am unteren mit $\pm (D + D_1)$, wobei das + Zeichen zur rechts gewundenen Kurve I gehört, so ist noch ein Kräftepaar $\pm K_1 l = \pm D_1$ zur Erhaltung des Gleichgewichtes notwendig. In der Bewegungsebene (Abb. 23, rechte Ansicht) tritt noch das Einspannungsmoment $D_2 = K_2 l$ hinzu. Schließlich kommt noch ein Drillungsmoment M mit positivem Drehsinn und die Last P in Betracht.

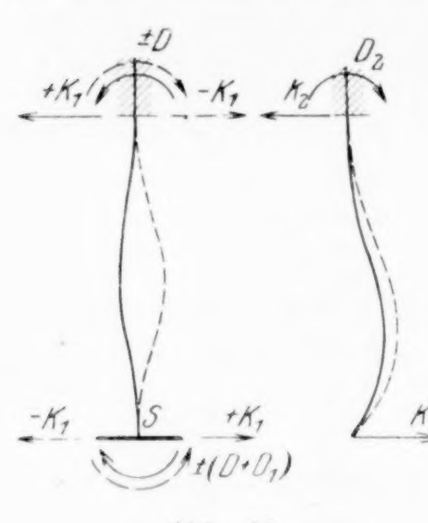


Abb. 23.

Die in die Richtung a fallende Komponente der Querkraft ist

$$N = \mp K_1 \cos\varphi\, l_1 \mp K_1 \sin\varphi\, m_1 + K_2 \sin\varphi\, l_1 - K_2 \cos\varphi\, m_1 - P\, n_1$$

und der in die gleiche Richtung fallende Momentenvektor ist

$$G = \pm D (\sin\varphi\, l_1 - \cos\varphi\, m_1) \pm K_1 [(l - z)(\sin\varphi\, l_1 - \cos\varphi\, m_1) + (\sin\varphi\, x - \cos\varphi\, y)\, n_1]$$
$$- K_2 [z (\cos\varphi\, l_1 + \sin\varphi\, m_1) - (\cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y)\, n_1] + M\, n_1 - P (x\, m_1 - y\, l_1).$$

Aus diesen und den entsprechenden Gleichungen für die Richtungen b und t, Einführung der Werte aus (2) und Vernachlässigung der Produkte von x, y, f, x', y' ergeben sich die Komponenten der Kraft und des Momentes wie folgt, wenn außerdem auf gleiche Weise wie bei der Schneiden-Spitzenlagerung und der doppelten Schneidenlagerung geschlossen wird, daß die Auflagerreaktionen, hier D, K_1, K_2 und M sehr klein gegenüber P bzw. Pl sein müssen:

$$\left.\begin{aligned} N &= \mp K_1 \cos\varphi + K_2 \sin\varphi + P x', & G &= \pm D \sin\varphi \pm K_1 (l - z) \sin\varphi - K_2 z \cos\varphi + P y, \\ N' &= \mp K_1 \sin\varphi - K_2 \cos\varphi + P y', & G' &= \mp D \cos\varphi \mp K_1 (l - z) \cos\varphi - K_2 z \sin\varphi - P x, \\ T &= -P & , \quad H &= M \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Das Drillungsmoment M verschwindet, da f eine lineare Funktion von z sein müßte, wie aus der dritten Gl. (3) folgt. Die erste und zweite dieser Beziehungen ergeben die Gleichungen der Elastica.

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \sin\alpha z + C_2 \cos\alpha z \mp \frac{D}{P} \cos\varphi \mp \frac{K_1}{P} (l - z) \cos\varphi - \frac{K_2}{P} z \sin\varphi \\ y &= C_3 \sin\beta z + C_4 \cos\beta z \mp \frac{D}{P} \sin\varphi \mp \frac{K_1}{P} (l - z) \sin\varphi + \frac{K_2}{P} z \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (14).$$

Den sieben Konstanten C_{1-4}, $\frac{D}{P}$, $\frac{K_1}{P}$, $\frac{K_2}{P}$ entsprechen sieben Randbedingungen, und zwar $x = y = 0$ für beide Stabenden und $x' \cos\varphi + y' \sin\varphi = 0$ an der Schneide in $z = 0$, $x' = y' = 0$ am eingespannten Ende $z = l$. Die Knickbedingung ist daher

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \mp\cos\varphi & \mp l\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mp\sin\varphi & \mp l\sin\varphi & 0 \\ \alpha\cos\varphi & 0 & \beta\sin\varphi & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & 0 & 0 & \mp\cos\varphi & 0 & -l\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\beta l & \cos\beta l & \mp\sin\varphi & 0 & l\cos\varphi \\ \alpha\cos\alpha l & -\alpha\sin\alpha l & 0 & 0 & 0 & \pm\cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \beta\cos\beta l & -\beta\sin\beta l & 0 & \pm\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \\ = \alpha l(2-2\cos\alpha l-\alpha l\sin\alpha l)(\sin\beta l-\beta l\cos\beta l)\cos^2\varphi+\beta l(2-2\cos\beta l \\ -\beta l\sin\beta l)(\sin\alpha l-\alpha l\cos\alpha l)\sin^2\varphi \quad (15).$$

Auch die Gleichungen der Elastica nehmen hier eine verhältnismäßig einfache Gestalt an.

$$\left.\begin{aligned} x &= C\cos\varphi(\sin\beta l-\beta l\cos\beta l)[(1-\cos\alpha l-\alpha l\sin\alpha l)\sin\alpha z \\ &\quad +(\sin\alpha l-\alpha l\cos\alpha l)(\cos\alpha z-1)+(1-\cos\alpha l)\alpha z] \\ y &= C\sin\varphi(\sin\alpha l-\alpha l\cos\alpha l)[(1-\cos\beta l-\beta l\sin\beta l)\sin\beta z \\ &\quad +(\sin\beta l-\beta l\cos\beta l)(\cos\beta z-1)+(1-\cos\beta l)\beta z] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16).$$

In der Projektion auf die x-y-Ebene ist die Tangente an die Elastica am eingespannten Ende $z=l$ gegeben durch

$$\operatorname{tg}\lambda = \left(\frac{x''}{y''}\right)_{z=l} = \frac{\alpha^2\cos\varphi\,(\sin\beta l-\beta l\cos\beta l)\,(\alpha l-\sin\alpha l)}{\beta^2\sin\varphi\,(\sin\alpha l-\alpha l\cos\alpha l)\,(\beta l-\sin\beta l)},$$

fällt also im allgemeinen wie bei der Schneiden-Spitzenbewegung mit keiner ausgezeichneten Richtung zusammen.

Besitzt der Querschnitt Axialsymmetrie, so vereinfacht die Knickbedingung sich zu

$$0 = \alpha l(\sin\alpha l-\alpha l\cos\alpha l)(2-2\cos\alpha l-\alpha l\sin\alpha l).$$

Dann ist die erste Knicklast gegeben durch $\operatorname{tg}\alpha l = \alpha l$, die zweite durch $\alpha l = 2\pi$. Ist andererseits $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 0$, so lautet die Knickbedingung

$$0 = \beta l(2-2\cos\beta l-\beta l\sin\beta l)\sin^2\varphi+\frac{\alpha^2 l^2}{20}[5(\sin\beta l-\beta l\cos\beta l)\cos^2\varphi \\ -2\beta l(2-2\cos\beta l-\beta l\sin\beta l)\sin^2\varphi]+\ldots$$

Somit ergibt sich die erste Knicklast aus $\beta l = 2\pi$, wenn φ von Null verschieden ist.

Die Schneide wirkt dann wie eine Einspannung. Nur wenn $\varphi = 0$ ist, kommt eine Drehung um die Schneide zustande. Dann ist $\operatorname{tg}\beta l = \beta l$ Knickbedingung. Abb. 24 zeigt die auf die kleinste Knicklast P_{00} eines Stabes von gegebener Länge bezogenen Knicklasten für einige Querschnittsverhältnisse $J_{\min} : J_{\max}$ und $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$. Die Schaulinien gleichen jenen für Schneiden-Spitzenlagerung in Abb. 3. Die Elastica für gleichschenkelige Winkeleisen ($J_{\min} : J_{\max} = 1 : 3{,}76$) und $\varphi = 60^0$ ist in Abb. 25 dargestellt.

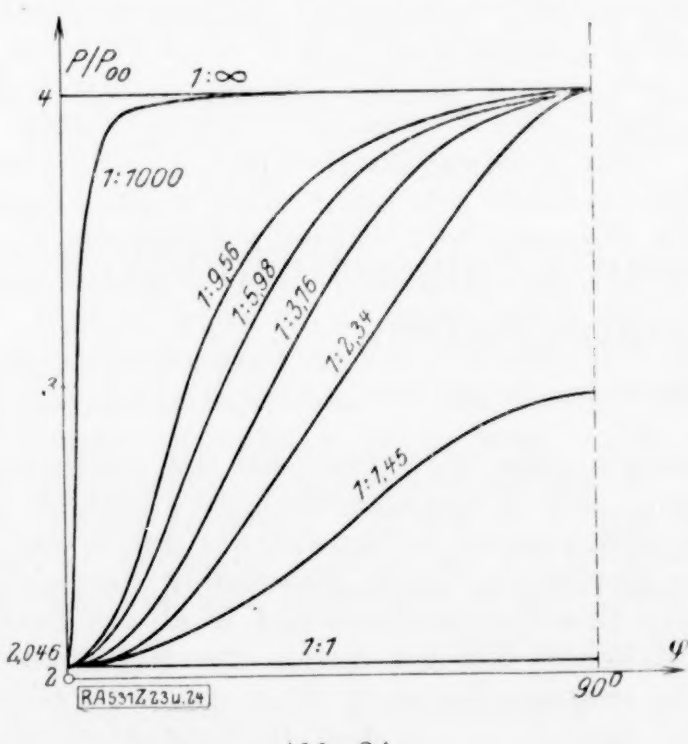


Abb. 24.

5. Zur Stabachse geneigte Schneiden.

Schneiden. Eine Neigung der Schneide gegen die Stabachse bedeutet insofern eine Aenderung der Randbedingungen, als die Bewegung des an die Schneide grenzenden Linienelementes der Stabachse nicht in einer Ebene, sondern in der Mantelfläche eines Kreiskegels

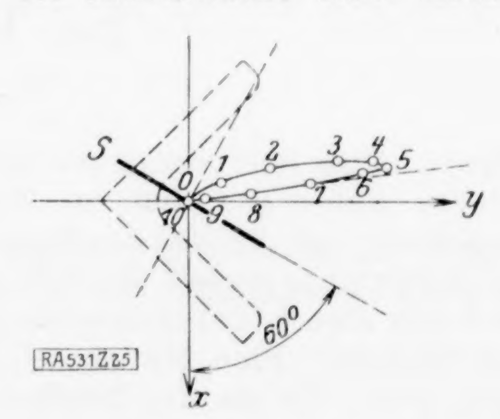


Abb. 25.

erfolgt. Da aber die Ausweichungen als sehr klein angenommen worden sind, besteht zwischen beiden Arten der Bewegung im allgemeinen kein wesentlicher Unterschied. Die durch die z-Achse gelegte Tangentialebene des Kreiskegels wird zur Bewegungsebene und es behalten alle Ausführungen volle Gültigkeit, wenn unter φ bzw. ψ jene Winkel verstanden werden, welche die $x-y$-Projektionen der Schneiden mit der x-Achse einschließen.

Demnach wäre überhaupt kein Anlaß vorhanden, die Wirkung geneigter Schneiden genauer zu untersuchen, wenn nicht bei zunehmender Neigung schließlich aus der Schneidenlagerung eine volle Einspannung hervorgehen würde, in welchem Falle die bis dahin gültige Randbedingung $x' \cos\varphi + y' \sin\varphi = 0$ völlig verändert würde und $x' = 0$, $y' = 0$ zu lauten hat. Dieser Uebergang ist formelmäßig darzustellen.

Schließt die Schneide mit der z-Achse einen Winkel χ ein, so bedeutet $\sin\chi \cos\varphi$ den Cosinus des Winkels der Schneide gegen die x-Achse, $\sin\chi \sin\varphi$ den Cosinus des Winkels gegen die y-Achse. Somit lautet die Randbedingung für endliche Bewegungen (Drehungen) des Stabendes mit Benutzung von Gl. (1)

$$\sin\chi \cos\varphi\, l_3 + \sin\chi \sin\varphi\, m_3 + \cos\chi\, n_3 = \cos\chi .$$

Setzen wir in diese Gleichung für l_3, m_3, n_3 die bis auf Größen zweiter Kleinheitsordnung genauen Werte

$$l_3 = x' \qquad m_3 = y', \qquad n_3 = 1 - {}^1/_2\,(x'^2 + y'^2)$$

ein, so nimmt sie die Form an

$$x' \cos\varphi + y' \sin\varphi = {}^1/_2 \operatorname{ctg}\chi\,(x'^2 + y'^2).$$

Hier kann die rechte Seite für $\chi = \frac{\pi}{2}$ und alle endlichen Werte von $\operatorname{ctg}\chi$ gegen die linke als verschwindend klein angesehen werden. Dann entsteht wieder die für gewöhnliche Schneiden gültige Randbedingung. Nimmt χ weiter ab, so daß $\operatorname{ctg}\chi$ die Größenordnung von $\frac{1}{x'}$ annimmt, so entsteht eine neue Randbedingung, nämlich die oben angeschriebene. Bei noch stärkerer Abnahme von χ steigt die Größenordnung von $\operatorname{ctg}\chi$ auf die von $\left(\frac{1}{x'}\right)^2$ und dann muß, weil $x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$ sehr klein bleiben muß $(x'^2 + y'^2) = 0$, d. h. $x' = 0$ und $y' = 0$ gesetzt werden, wie für vollkommene Einspannung.

Es ergibt sich mithin, daß wohl ein stetiger Uebergang der Randbedingung $x' \cos\varphi + y' \sin\varphi = 0$ für Schneidenlagerung in $x' = 0$ und $y' = 0$ für volle Einspannung beobachtet werden kann, wie es sein muß, wenn die Neigung der Schneide gegen die Stabachse von $\frac{\pi}{2}$ bis auf 0 abnimmt, daß aber die erstere Bedingung noch für sehr kleine Winkel χ ihre Gültigkeit behält. Bei jenen technischen Anwendungen der Knickformeln, bei welchen geneigte Schneiden anzunehmen wären, z. B. bei Dachstühlen oder Brückenträgern, wenn Obergurt und Untergurt nicht parallel verlaufen, oder bei manchen Fachwerksdiagonalen, kommen so kleine Winkel χ nicht in Betracht.

Hrn. Leopold Pack, welcher mich bei den Zahlenrechnungen sehr unterstützt hat, bin ich zu besonderem Dank verpflichtet. 531

Belastungsverhältnis und Gleitgeschwindigkeit bei Reibungsgetrieben.

Von **W. HEYN** in Graz.

Aufgabe eines Reibungtriebes ist es, Energie vom treibenden auf das getriebene Glied durch Reibungsschluß zu übertragen. Der Reibungsschluß ist dadurch gekennzeichnet, daß die sich berührenden Oberflächen der beiden Glieder durch eine Normalkraft P zusammengepresst werden und das getriebene Glied gleichzeitig einen durch den Bau und den Zweck des Getriebes gegebenen Bewegungswiderstand W an der Berührungsstelle entwickelt. Eine Mitnahme des getriebenen Gliedes durch das treibende tritt nur dann ein, wenn die an der Berührungsstelle erzeugte Reibung $P \cdot \mu$, mit μ als Beiwert der trockenen gleitenden Reibung fester Körper, hinreicht, um dem Bewegungswiderstand W

das Gleichgewicht halten zu können. Das Verhältnis $\frac{W}{P}$ sei weiterhin als Belastungsverhältnis bezeichnet. Die bisher veröffentlichten Versuche über Reibungsgetriebe zeigten, daß jede Energieübertragung mit einem als Schlupf bezeichneten Gleiten zwischen treibendem und getriebenem Glied verbunden ist.

Die nachfolgende Untersuchung bezweckt, Beziehungen zwischen Belastungsverhältnis und Gleitgeschwindigkeit aufzustellen und sie mit den Ergebnissen bereits hierüber veröffentlichter Versuche in Einklang zu bringen.

Der Begriff des Getriebes setzt im allgemeinen die Möglichkeit einer dauernden Energieübertragung voraus, verlangt also, daß die an der Berührungsstelle der Reibungsglieder entstehenden Oberflächenspannungen sich in solchen Grenzen halten, daß die Beschaffenheit der Oberflächen sich möglichst wenig durch Abnutzung ändert, und schließt den Fall der Zerstörung der Oberfläche durch Herausreißen größerer Molekülgruppen von vorn herein aus. Der Einfluß der an der Berührungsstelle entstehenden Materialspannungen und der Abnutzung auf die Größe von μ soll daher vorerst vernachlässigt werden, desgleichen der Einfluß der sogenannten rollenden Reibung, die tatsächlich mit dem Begriff der Reibung nichts zu tun hat, vielmehr als eine Folgeerscheinung der an der Berührungsstelle auftretenden Formänderung aufzufassen ist.

Für unsere weitere Betrachtung wählen wir ein aus zwei Scheiben I und II mit kreiszylindrischer Begrenzung bestehendes Reibungsgetriebe (Abb. 1). Die Achsen der beiden Räder seien jedoch nicht parallel sondern kreuzen sich unter dem Winkel α, so daß auch die beiden Mittelebenen der Räder, weiterhin die Rollebenen genannt, um die Berührungsnormale um den Winkel α, weiterhin als Schrägstellungswinkel bezeichnet, gegeneinander gedreht sind. Beide Räder werden durch die in Richtung der Berührungsnormalen wirkenden Kraft P gegeneinander gedrückt. Rad I ist als treibendes Rad dadurch bestimmt, daß es durch ein in seiner Achse eingeleitetes Moment die Umfangsgeschwindigkeit v erhält, während das getriebene Rad II seiner Drehung mit der Umfangskraft W entgegenwirkt. In bezug auf das getriebene Rad II zerlegt sich v in eine Teilgeschwindigkeit $v \cdot \cos \alpha$ in Richtung der Rollebene II und in eine zweite $v \cdot \sin \alpha$ senkrecht hierzu (Abb. 1). Die Richtung der an der Berührungsstelle entstehenden Reibung muß entgegengesetzt zur relativen Gleitgeschwindigkeit sein. Soll das getriebene Rad durch das treibende Rad mitgenommen werden, so muß die Reibung $P \cdot \mu$ in Richtung von W, also in Richtung von Rollebene II eine Teilkraft entwickeln, die W das Gleichgewicht hält. Es kann also $v \cdot \sin \alpha$ noch nicht die relative Gleitgeschwindigkeit an der Berührungsstelle sein, denn sonst würde $P \cdot \mu$ senkrecht zur Rollebene II stehen. Rad II kann sich daher nicht mit der Umfangsgeschwindigkeit $v \cdot \cos \alpha$ drehen und muß in Richtung seiner Rollebene mit der Geschwindigkeit v_g gleiten. v_g und $v \cdot \sin \alpha$ setzen sich zu einer resultierenden Gleitgeschwindigkeit v_r zusammen, deren Richtung um den $\measuredangle\, \delta$ von der Rollebene II abweicht. Damit ist die Richtung der Reibung $P \cdot \mu$ bestimmt, deren Teilkraft in Richtung der Rollebene II der Umfangskraft W das Gleichgewicht halten muß.

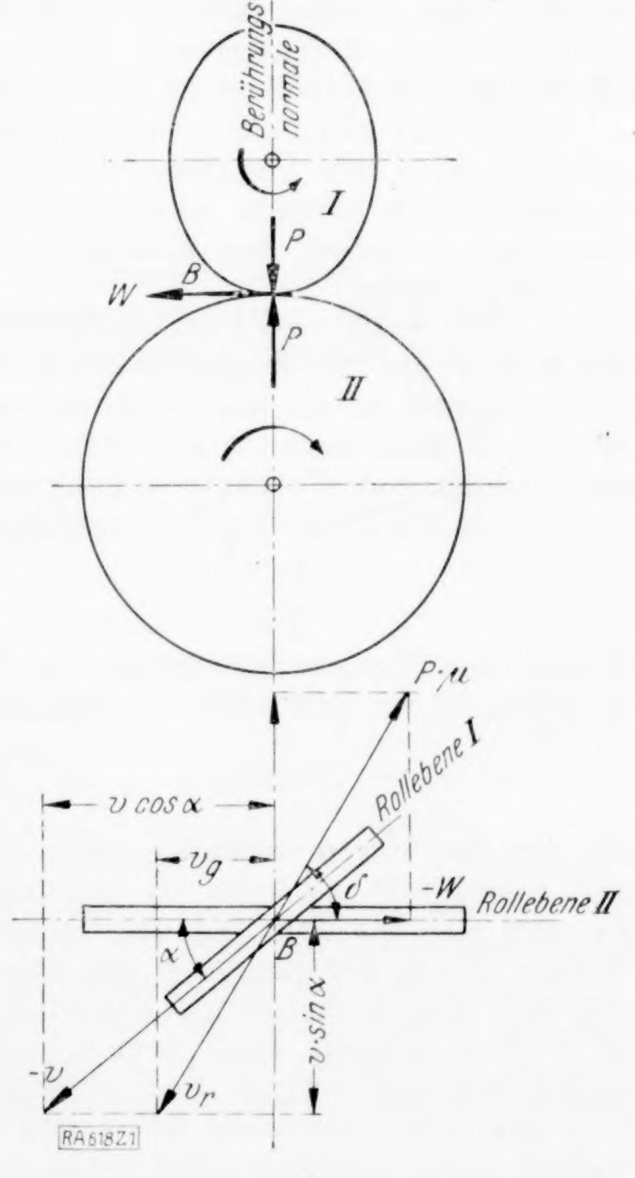


Abb. 1.

$$P \cdot \mu \cdot \cos \delta + W = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

folgt aus dem Kräftedreieck, desgleichen

$$v_r \cdot \sin \delta = v \cdot \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

aus dem Geschwindigkeitsdreieck. Gl. (1) sagt in der Form:

$$-\frac{W}{P} = \mu \cdot \cos\delta$$

aus, daß jedem Belastungsverhältnis $\frac{W}{P}$ eine durch Winkel δ festgelegte Richtung der relativen Gleitgeschwindigkeit v_r zugeordnet ist. Die Größe von v_r regelt sich nach Gl. (2) mit dem Werte der gegebenen Größen v und α.

Durch Ausscheiden von δ und Auflösung nach μ findet sich aus Gl. (1) und (2) die Beziehung:

$$\mu = -\frac{W}{P} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v \cdot \sin\alpha}{v_r}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Gemäß der Ableitung gilt die Gleichung für jeden beliebigen Schrägstellungswinkel α. Der Fall der Deckung der beiden Rollebenen mit $\alpha = 0$ muß daher auch in dieser Gleichung enthalten sein.

$$\mu = -\frac{W}{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Wir haben diese Gleichung als eine Gleichgewichtsbedingung zwischen den wirkenden Kräften W und $P \cdot \mu$ gefunden, während sie bisher nur als eine Grenzbedingung gedeutet wurde, die in der Form

$$-W \leq P \cdot \mu$$

aussagt, daß Gleiten an der Berührungsstelle ausgeschlossen ist, solange W kleiner als die auftretende Reibungskraft $P \cdot \mu$ ist. Auf diesen Grenzfall des Abrollens zweier gleichgerichteter Räder soll noch etwas näher eingegangen werden.

Es läßt sich, ohne daß an den Voraussetzungen der Gleichungen (1) bis (3) etwas geändert wird, die Annahme machen, daß P, W und v hinsichtlich ihrer absoluten Größen unveränderlich bleiben, wenn das treibende Rad I die Richtung seiner Rollebene gegenüber Rad II ändert, der Schrägstellungswinkel α somit alle Werte von $\alpha = \alpha_0$ bis $\alpha = 0$ annehmen kann.

Geht man vom Coulombschen Reibungsgesetz aus, wonach die Größe der Reibung, somit hier der Reibungsbeiwert μ, unabhängig ist von der Größe der relativen Gleitgeschwindigkeit v_r an der Berührungsstelle B, so kann wegen der Unveränderlichkeit von W und P sich auch μ und damit Winkel δ nicht ändern, δ ist für diesen Fall daher unabhängig vom Schrägstellungswinkel α.

Um die Richtung der Aenderung von v_r zu finden, differenzieren wir Gl. (2) nach α

$$d\,v_r = \frac{v \cdot \cos\alpha}{\sin\delta} \cdot d\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Wegen der Unveränderlichkeit von δ muß $d\,v_r$ für jedes beliebige α in die Richtung von v_r fallen. Dies gilt auch für den Grenzwinkel $\alpha = 0$

$$d\,v_{r\,(\alpha=0)} = \frac{v}{\sin\delta} \cdot d\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5\,a).$$

Da $d\,v_r$ für diesen Grenzfall einen eindeutigen und endlichen Wert hat und eine Unstetigkeit ausschließt, so kann Gl. (4) nur als eine Gleichgewichtsbedingung aufgefaßt werden. Es muß also für den Fall der Deckung beider Rollebenen die Reibungskraft $P \cdot \mu$ um den Winkel δ von der Richtung der Rollebenen abweichen, sofern $W < P \cdot \mu$ ist, ein Ergebnis, das mit der bisherigen Auffassung über die Reibung nicht übereinstimmt. Der Fall $W < P \cdot \mu$ schließt nach dem Coulombschen Gesetz ein Gleiten der Räder neben dem Rollen aus und verlegt die Richtungslinie von $P \cdot \mu$ in die gemeinsame Rollebene. Dieser Teil des Coulombschen Reibungsgesetzes, wonach μ unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit v_r ist, erscheint hier nicht mit den Gesetzen der Mechanik verträglich.

Wir wollen daher den gleichen Fall nochmals unter der Annahme betrachten, daß der augenblickliche Wert des Reibungsbeiwertes μ von der relativen Gleitgeschwindigkeit v_r eindeutig abhängig ist

$$\mu = \Phi\,(v_r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

so daß jedem v_r ein bestimmtes μ zugeordnet ist. Eine Aenderung von α zieht nach Gl. (2) zunächst eine Aenderung von v_r nach sich, somit gemäß Voraussetzung auch von μ. Eine Aenderung von μ bedingt nach Gl. (1) eine Aenderung des Winkels δ, d. h. v_r

muß seine Richtung wechseln, wie auch der aus Gl. (1), (2) und (6) gebildete analytische Ausdruck zeigt

$$-\frac{W}{P} = \cos\delta \cdot \Phi\left(\frac{v \cdot \sin\alpha}{\sin\delta}\right) = \text{const.}$$

Wird Winkel α zu Null, so ergibt Gl. (1) mit Bezug auf Gl. (4), daß Winkel δ ebenfalls den Wert Null annimmt, d. h. die Richtungslinie der Reibung fällt in die gemeinsame Richtung der beiden Rollebenen. Welcher Wert von δ einem beliebigen Wert von α zugeordnet ist, kann erst nach Kenntnis der Funktion $\Phi(v_r)$, deren Verlauf für die einzelnen Baustoffe nur empirisch gefunden werden kann, bestimmt werden. Für v_r ergibt $\alpha = 0$ aus Gl. (2) die unbestimmte Form:

$$v_r = v \cdot 0/0.$$

Durch Ausscheiden von $\cos\delta$ aus Gl. (2) mit Hilfe von Gl. (1) kommt man auf die Bestimmungsgleichung:

$$v_r \cdot \sqrt{1-\left(-\frac{W}{P}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\Phi(v_r)}\right]^2} = v \sin\alpha = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Hieraus ergeben sich zwei mögliche Werte für v_r. Der erste ist $v_r = 0$, d. h. die beiden Räder rollen aufeinander ab, ohne gleichzeitig zu gleiten. Dieser Zustand kann, bei einem eindeutigen funktionellen Zusammenhang zwischen μ und v_r nur dann eintreten, wenn die Funktion $\Phi(v_r)$ so beschaffen ist, daß sie für $v_r = 0$ einen endlichen von Null verschiedenen Wert a aufweist (Abb. 2) und den Wurzelausdruck reell macht. Solange daher das Belastungsverhältnis $\frac{W}{P}$ für $\alpha = 0$ unter diesem Wert a liegt, muß reines Rollen stattfinden. Hat $\frac{W}{P}$ den Wert a überschritten oder ist $\alpha = 0$, so ist gemäß Gl. (4) und (6) v_r von Null verschieden. Gl. (7) ist dann nur erfüllt wenn

$$-\frac{W}{P} = \Phi(v_r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wenn also jedem Belastungsverhältnis eine bestimmte Gleitgeschwindigkeit zugeordnet ist. Gl. (4) kann nicht mehr als eine Grenzbedingung aufgefaßt werden. Die durch Gl. (6) festgesetzte Beziehung zwischen Reibung und Gleitgeschwindigkeit verträgt sich demnach sehr wohl mit den Gesetzen der Mechanik.

Der physikalische und experimentelle Beweis für die der Gl. (6) zugrunde liegende Voraussetzung ist bereits durch mehrere Forscher erbracht worden.

So haben die Versuche von Dr. Jakob (Ann. d. Physik 1912, IV. Folge) über trockene Reibung unter möglichst genau umschriebenen physikalischen Bedingungen ergeben, daß der Reibungswert μ der trockenen gleitenden Reibung von der Gleitgeschwindigkeit v_r abhängig ist (Abb. 3). Da diese Versuche nur mit möglichst reinen, gasfreien, trockenen und glatten Oberflächen vorgenommen wurden und somit an Bedingungen, die bei technischen Getrieben meist nur sehr unvollkommen erfüllt sind, geknüpft erscheinen, wurden die Jakobschen Ergebnisse bisher von den Ingenieuren mit sehr wenig Ausnahmen abgelehnt. Dazu kommt, daß der aufsteigende Ast der μ-Kurve nach Jakob relativ sehr kleine Geschwindigkeiten in der Größenordnung bis höchstens einige cm/s umfaßt, während die meisten technischen Geschwindigkeiten wesentlich höher liegen.

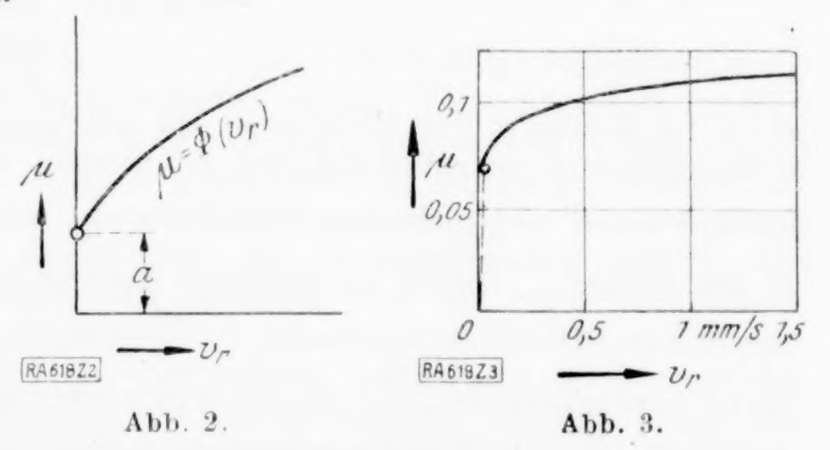


Abb. 2. Abb. 3.

Bei näherem Zusehen zeigt sich jedoch, daß diese letztere Auffassung bei vielen Bewegungsvorgängen nicht zutrifft, nämlich bei den meisten Wälz- und Rollbewegungen. Hier wird einerseits die Berührungsstelle als Relativpol der Bewegung mit relativen Geschwindigkeiten durchlaufen, die nur sehr wenig von Null abweichen, so daß die zugehörigen μ-Ordinaten im aufsteigenden Ast der μ, v_r-Kurve liegen; andererseits ist neben dem Anpressungsdruck meist noch eine Umfangskraft zu übertragen, wobei die Reibung die Aufgabe einer Gegenkraft und nicht eines Bewegungswiderstandes zu erfüllen hat. Damit sind die Voraussetzungen, die unseren Gleichungen zugrunde lagen, erfüllt.

Das in Reibungsgetrieben vorhandene Belastungsverhältnis $\frac{W}{P}$ bedingt an der Berührungsstelle neben dem Rollen noch eine Gleitbewegung (häufig auch als Schlupf bezeichnet), deren Gesetz sich grundsätzlich nach der von Jakob gefundenen Abhängigkeit zwischen μ und v_r regeln muß. Selbstverständlich wird je nach der Art der Baustoffe, der Beschaffenheit der Oberflächen, durch Staub, Schmutz, Feuchtigkeit und dergl. sich der Verlauf der μ, v_r-Kurve ändern, was aber an der grundsätzlichen Abhängigkeit von μ mit v_r nichts ändert.

Nach Gl. (3) ist jedem Belastungsverhältnis $\frac{W}{P}$ ein bestimmter Beiwert μ bei gegebenem Schrägstellungswinkel α zugeordnet; somit entspricht jeder Gleitgeschwindigkeit v_r ein bestimmtes Belastungsverhältnis $\frac{W}{P}$. Ist der Verlauf der μ, v_r-Kurve bekannt, so muß sich daraus auch der Verlauf einer v_r, $\frac{W}{P}$ - Kurve ableiten lassen.

Abb. 4.

Wir gehen hierbei von dem Kräfte- und Geschwindigkeitsdreieck in Abb. 1 aus und tragen in Abb. 4 vom Nullpunkt des Koordinatensystems für die als gegeben zu betrachtende μ, v_r-Kurve die Umfangsgeschwindigkeit v unter dem Winkel α zur Ordinatenachse ab. Auf der Ordinate durch den Endpunkt von v müssen gemäß Gl. (2) die Endpunkte aller möglichen v_r liegen. Greifen wir einen beliebigen Punkt A auf der μ, v_r-Kurve heraus, und schlagen mit der zugehörigen Abszisse OE vom Nullpunkt einen Kreis bis zum Schnitt C mit der v-Ordinate, so ist die Verbindungslinie OC die Gleitgeschwindigdigkeit v_r nach Größe und Richtung. Entgegengesetzt zu ihr verläuft $P \cdot \mu$. Wählen wir P als Einheit, so ist die Länge von $P \cdot \mu$ gleich der Ordinate des Punktes A, wir machen somit Strecke $OR = AE$. Nach dem Kräftedreieck Abb. 1 haben wir die Reibung $P \cdot \mu$ in Richtung der Rollebene des getriebenen Rades, die hier mit der Richtung der Ordinatenachse zusammenfallend zu denken ist, und senkrecht dazu zu zerlegen; dann ist Strecke $R'E$ gleich dem Verhältnis $\frac{W}{P}$, mit Rücksicht auf den gewählten Maßstab mit P als Einheit. Durch wiederholte Konstruktion für beliebige Punkte erhalten wir die durch den Winkel α bestimmte v_r, $\frac{W}{P}$ - Kurve, die wir weiterhin als die Gleit Belastungskurve bezeichnen wollen, da sie uns eindeutig den Zusammenhang zwischen Belastungsverhältnis $\frac{W}{P}$ mit der Gleitgeschwindigkeit wiedergibt. Für den Grenzfall $\alpha = 0$ deckt sich die Gleit-Belastungskurve mit der μ, v_r-Kurve.

Auch für diese Gleit-Belastungskurve ist der experimentelle Beweis bereits vorhanden. Ich verweise hier auf die Versuche von J. Jahn, Danzig (V. D. I. 1918) und von G. Sachs, Charlottenburg (Maschinenbau 1923 und Zeitschr. für angewandte Math. und Mech. 1924).

Jahn bringt insbesondere in seiner Abb. 8 (V. D. I. 1918 Seite 146) eine Beziehung zwischen Umfangskraft und dem in pro Mille des Rollumfanges angegebenen Gleitweg. Zeichnet man dieses Diagramm von Jahn derart um, daß als Ordinaten nicht mehr die Umfangskraft sondern das Belastungsverhältnis $\frac{W}{P}$ und als Abszissen an Stelle des Gleitweges die Gleitgeschwindigkeit genommen wird, was mit den im Jahnschen Aufsatz gemachten Angaben leicht durchgeführt werden kann; so erhalten wir unsere Gleit-Belastungskurve (Abb. 5).

Aber auch Sachs veröffentlicht in den obengenannten Zeitschriften eine Reihe von Schlupfkurven für verschiedene Materialien die unseren Voraussetzungen entsprechen.

Hierbei sind als Ordinaten das Belastungsverhältnis, als Abszissen der Gleitweg für einen Rollenumfang aufgetragen. Da jedoch bei Sachs die Versuchskörper mit gleichförmiger Geschwindigkeit umliefen, so ist der Gleitweg der Gleitgeschwindigkeit proportional. Die von Sachs in Abb. 20, 21, 36 bis 37 und 42 (in Zeitschrift für angewandte Math. und Mech. Seite 1 usw.) angegebenen Kurven sind daher ebenfalls die Gleit-Belastungskurven für die betreffenden Materialien.

Schließlich wäre noch zu erwähnen, daß sowohl bei den Versuchen von Jahn wie auch bei den Versuchen von Sachs keine besonderen Vorkehrungen für die genaue Einhaltung des Zusammenfallens beider Rollebenen ($\alpha = 0$) getroffen waren. Eine genaue Nachrechnung zeigt, daß schon Abweichungen um wenige Bogenminuten von $\alpha = 0$ bemerkbare Abweichungen der Gleit-Belastungskurve auf Grund von Gl. (3) bringen. Die bisher gefundenen Kurven können daher nur als Näherungswerte betrachtet werden, bis genauere Versuche hierüber vorliegen.

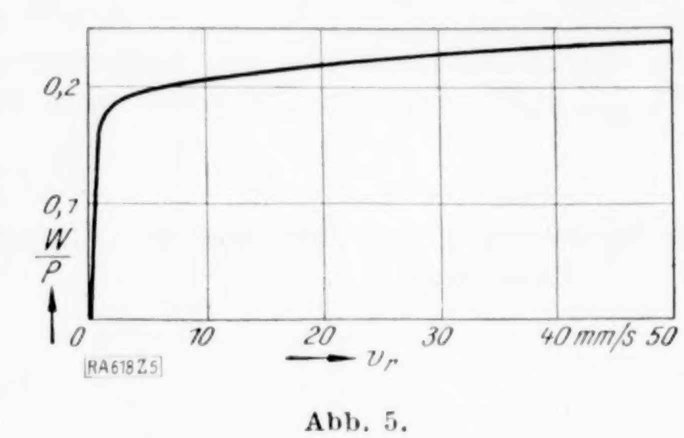


Abb. 5.

Aus dem Gesagten ist zu entnehmen, daß bei allen Wälz- und Rollvorgängen, wie sie namentlich bei Reibungsgetrieben auftreten, das Belastungsverhältnis die maßgebende Größe ist, welche den Schlupf bedingt und auf Grund des schon durch Jakob gefundenen Zusammenhanges zwischen Reibung und Gleitgeschwindigkeit regelt. 618

Luftwiderstand, Gewicht und Kosten von Luftröhrchenkühlern.

Von L. RICHTER in Wien.

Die angenäherte, besonders bei Flugzeugen wichtige Berechnung des Luftwiderstandes und des Gewichtes von Luftröhrchenkühlern scheint ebenso möglich wie die der Kühlleistung[1]) und ein Weg hierzu sowie der Zusammenhang dieser Haupteigenschaften soll hier gezeigt werden. Der Einfluß der Abmessungen von Kühlern bestimmter Bauart auf die Kosten wird am Schlusse kurz angedeutet.

1. Berechnung des Luftwiderstandes. Trotzdem der Strömungswiderstand eines Körpers sonst grundsätzlich nicht aus den Widerständen seiner Teile zusammengesetzt werden kann,[2]) muß doch für den Kühler dieser Weg der Rechnung gewählt, müssen die Widerstände des Blockes und des Rahmens einzeln gerechnet und summiert werden, da sonst für jeden einzelnen Fall nur die Widerstandsbestimmung durch den Versuch übrig bliebe und selbst eine Umrechnung auf Grund des Aehnlichkeitgesetzes infolge des Unterschiedes in der Größenordnung der Maße des Rahmens und der einzelnen Röhren nur in engen Grenzen möglich wäre.

Für einen Block mit großer Stirnfläche, der einem Luftstrome ausgesetzt ist, welcher in allen Punkten, die entsprechend weit von der Stirnfläche entfernt sind, die die gleiche Strömungsrichtung parallel zu den Röhrenachsen und die gleiche Geschwindigkeit hat, gilt angenähert und zwar genauer für den mittleren Teil als für den Rand, wenn die statischen Drücke vor und hinter dem Block gleichgesetzt werden,

$$\frac{W_f^2}{2g} = \xi_e \frac{W_i^2}{2g} + \beta \frac{l}{d} W_i^2 + \xi_a \frac{W_i^2}{2g} + \frac{W_h^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Darin ist W_f die Geschwindigkeit des freien Lufstromes vor dem Kühler, W_i die mittlere Luftgeschwindigkeit in den zylinderischen Röhrchen mit dem gleichwertigen Durchmesser

$$d = \frac{4f}{u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

(f die innere Querschnittsfläche in mm², u der innere Umfang in mm) und der Länge l (= Blocktiefe) in m, W_h die Luftgeschwindigkeit unmitttelbar hinter dem Kühler, alle

[1]) Richter, Zur Berechnung der Luftröhrchenkühler, diese Zeitschr. 5 (1925), S. 293 bis 313; im Folgenden mit „R" zitiert.

[2]) Hütte I, 24. Aufl., S. 430.

Geschwindigkeiten in m/s, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ die Beschleunigung der Schwere, ξ_e und ξ_a Beiwerte für plötzliche zentrale Verengung und Erweiterung [1]), die von der Durchlässigkeit

$$\varphi_i = \frac{F_i}{F_B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

abhängen (F_i der lichte Durchlaß, F_B die gesamte Stirnfläche des Blockes in $\mathrm{m^2}$), und

$$\beta = 6.02\, d^{-0{,}269} (\gamma\, W_i)^{-0{,}148} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

die Widerstandszahl für den Reibungsverlust in den Röhrchen nach **Fritzsche** [2]). Aus Gl. (1) ergibt sich der Luftwiderstand der Stirnflächeneinheit ($1\ \mathrm{m^2}$)

$$p = \frac{W_f^2 - W_h^2}{2\,g}\gamma = \frac{W_i^2}{2\,g}\gamma\left(\xi_e + \xi_a + 2\,g\,\beta\,\frac{l}{d}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

in $\mathrm{kg\ m^{-2}}$ mit dem spezifischen Luftgewicht γ in $\mathrm{kg\ m^{-3}}$.

Setzt man, [3])

$$W_i = \frac{W_f}{\sqrt{\xi_e + 2\,g\,\beta\frac{l}{d} + \xi_a + \varphi_i^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und β nach Gl. (4) ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{W_f^2}{2g}\,\frac{1}{1+s}\,\gamma \text{ mit} \\ s &= \frac{\varphi_i^2}{\xi_e + \xi_a + 118{,}1\,(\gamma\,W_i)^{-0{,}148}\,d^{-1{,}269}\,l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und der Luftwiderstand des Blockes in kg

$$P_B = p\ F_B = C_B\,q\,F_B \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

mit dem Staudruck

$$q = \frac{W_f^2}{2\,g}\gamma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und der Widerstandszahl

$$C_B = \frac{1}{1+s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Widerstandsmessungen an Kühlerblöcken allein oder an tiefen Gittern mit zylindrischen Durchgängen, die aerodynamisch das gleiche Verhalten zeigen würden, konnte ich nicht ausfindig machen. Ich vergleiche daher in Zahlentafel 1 meinen Rechnungsgang mit den Kühlerversuchen **Kumbruchs** [4]), indem ich den Luftwiderstand des Kühlerblockes berechne, ihn von dem gemessenen Gesamtwiderstand P abziehe und so den Widerstand des Rahmens

$$P_R = W - W_B' = C_R\,q\,F_R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

erhalte, dessen Stirnfläche F_R bekannt ist.

Da diese Stirnfläche und daher auch der Widerstand des Rahmens viel kleiner ist als der des Blockes, kann, wenn sich daraus den sonstigen Erfahrungen entsprechende Werte für die Widerstandszahlen C_R ergeben, auf die angenäherte Richtigkeit der gerechneten Blockwiderstände geschlossen werden.

Zur Beurteilung dieser in Zeile 21 der Zahlentafel 1 zusammengestellten Werte C_R sind in Zahlentafel 2 die Widerstandszahlen einiger Vergleichskörper nach Göttinger Versuchen [5]) zusammengestellt. Der Vergleich mit diesen unter Berücksichtigung der Kühlerform, die aus den Abb. 1 bis 4 zu ersehen ist, läßt die Ansätze für den Luftwiderstand des Kühlerblockes wenigstens für Ueberschlagsrechnungen brauchbar erscheinen. Die Widerstandszahl für den Rahmen muß dann geschätzt werden, wozu ebenfalls die Werte der Zahlentafel 1 ein Behelf sein mögen.

Die Größe der bei Flugzeugen zur Ueberwindung des Kühler-Luftwiderstandes erforderlichen Leistung — nach **Kumbruch** 4 bis 9 vH der geamten Motorleistung, während sie bei Kraftwagenkühlern infolge der kleineren Eigengeschwindigkeit und der aerodynamisch weniger günstigen Form der Wagen, meist viel kleiner im Verhältnis zur Gesamtleistung ist — würde weitere Versuche rechtfertigen.

---

[1]) Hütte I, 24. Aufl., S. 376, 380; R, S. 294, Abb. 1.

[2]) Hütte I, 24. Aufl., S. 536.

[3]) R, S. 294.

[4]) Der Luftwiderstand von Stirnkühlern. Techn. Berichte, Bd. II, H. 1, S. 1; davon ein Auszug in **Pülz**, Kühlung und Kühler für Flugmotoren, Berlin 1920, S. 64.

[5]) Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen, II. Lieferung, S. 22 und 68.

Zahlentafel 1.

Luftwiderstand der Luftröhrchenkühler. Vergleich der Rechnung mit Versuchen Kumbruchs (Techn. Berichte, II/1).

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	V	Herkunft und Bezeichnung des Kühlers		Mercedes 1						Mercedes 2							
2	V	Abb. Nr.		1						2							
3	V	Gesamte Stirnfläche einschließlich Wasserkästen usw. senkrecht zum Luftstrom gemessen	m^2	0,339						0,276							
4	V	Block-Stirnfläche F_B	m^2	0,244						0,158							
5	V	Lichte durchlässige Stirnfläche Eintritt F_e, innen F_i, Austritt F_a	m^2	0,162						0,107							
6	V	Durchlässigkeit Eintritt φ_e, innen φ_i Austritt φ_a		0,664						0,677							
7	V	Rahmen-Stirnfläche	m^2	0,095						0,118							
8	V	Lichter Querschnitt der Röhren Eintritt, innen, Austritt	mm	5,5 ⌑						5,5 ⌑							
9	V	Gleichwertige Durchmesser Eintritt d_e, innen d_i, Austritt d_a	mm	5,5						5,5							
10	V	Länge der Röhrchen l	mm	150						145							
11	V	Rippenstärke zwischen den Röhrchen innen etwa	mm	2						2							
12	V	Staudruck $q = \frac{W_f^2}{2g}\gamma$	kg/m^2	14,6	25,7	39,9	57,0	77,3	101,0	6,4	14,4	25,4	39,2	56,2	76,6	100,4	116,0
13	V/R	Spezifisches Gewicht der Luft γ	kg/m^3	1,160 geschätzt						1,160 geschätzt							
14	V/R	Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler W_f	m/s	15,7	20,8	26,0	31,0	35,1	41,3	10,4	15,5	20,7	25,8	30,9	36,0	41,2	44,3
15	R	Luftgeschwindigkeit in den Röhrchen W_i	m/s	10,7	14,4	18,2	21,2	25,7	30,0	7,0	10,7	14,5	18,2	22,0	25,9	29,8	32,2
16	R	s. nach Gl. (7) und (7a)		0,258	0,268	0,275	0,281	0,286	0,292	0,264	0,277	0,288	0,296	0,303	0,308	0,314	0,317
17	R	Widerstandszahl des Blockes C_B		0,795	0,789	0,784	0,782	0,778	0,774	0,791	0,783	0,776	0,772	0,768	0,765	0,761	0,759
18	R	Luftwiderstand des Blockes P_B	kg	2,83	4,95	7,65	10,39	14,70	19,05	0,800	1,785	3,12	4,78	6,87	9,26	12,08	13,70
19	V	Gesamter Luftwiderstand des Kühlers P	kg	4,28	7,36	11,25	15,79	20,93	25,00	1,36	2,99	5,10	7,84	11,02	14,45	17,88	19,66
20	R	Luftwiderstand des Rahmens einschließlich der Wasserkasten usw. P_R	kg	1,45	2,41	3,60	4,90	5,95	6,23	0,560	1,21	1,98	3,06	4,15	5,19	5,80	5,86
21	R	Widerstandszahl des Rahmens C_R		1,045	0,987	0,950	0,905	0,849	0,621	0,741	0,713	0,661	0,662	0,624	0,572	0,490	0,428
22	V	Widerstandszahl des ganzen Kühlers C		0,865	0,845	0,831	0,817	0,798	0,730	0,770	0,751	0,727	0,724	0,705	0,684	0,644	0,615

Noch: Zahlentafel 1.

Luftwiderstand der Luftröhrchenkühler. Vergleich der Rechnung mit Versuchen Kumbruchs (Techn. Berichte, II./1).

Nr.	1	2	3	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
1	V	Herkunft und Bezeichnung des Kühlers		Rumpler ohne angesetztes Flügelstück						Rumpler mit angesetztem Flügelstück						Windhoff 4 mit freier Kühlfläche					
2	V	Abb. Nr.		3												4					
3	V	Gesamte Stirnfläche einschließlich Wasserkästen usw. senkrecht zum Luftstrom gemessen	m^2	0,198												0,177					
4	V	Block-Stirnfläche F_B	m^2	0,119												0,104					
5	V	Lichte durchlässige Stirnfläche Eintritt F_e, innen F_i, Austritt F_a	m^2	0,091												0,076, 0,055, 0,076					
6	V	Durchlässigkeit Eintrit φ_e, innen φ_i, Austritt φ_a		0,764												0,731, 0,527, 0,731					
7	V	Rahmen-Stirnfläche	m^2	0,079												0,073					
8	V	Lichter Querschnitt der Röhren Eintritt, innen, Austritt	mm	7,5 ◫												9,0, 7,5, 9,0 ◫					
9	V	Gleichwertige Durchmesser Eintritt d_e, innen d_i, Austritt d_a	mm	7,5												9,0, 7,5, 9,0					
10	V	Länge der Röhrchen l	mm	200												10 + 180 + 10					
11	V	Rippenstärke zwischen den Röhrchen innen etwa	mm	12												1,5					
12	V	Staudruck $q = \frac{W_f^2}{2\,g}\,\gamma$	kg/m^2	14,5	25,9	39,6	56,5	77,0	100,8	14,3	25,3	39,4	56,6	76,9	100,6	14,3	25,1	39,2	56,4	76,4	100,2
13	V/R	Spezifisches Gewicht der Luft γ	kg/m^3	1,160 geschätzt												1,160					
14	V/R	Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler W_f	m/s	15,7	20,5	25,8	30,9	36,1	41,3	15,5	20,5	25,6	31,0	36,1	41,2	15,6	20,6	25,8	30,9	35,4	41,2
15	R	Luftgeschwindigkeit in den Röhrchen W_i	m/s	11,0	14,5	18,5	22,3	26,3	30,2	10,8	14,5	18,4	12,3	26,3	30,2	12,15	16,40	20,8	25,2	29,0	34,2
16	R	s. nach Gl. (7) und (7a)		0,396	0,411	0,424	0,433	0,144	0,451	0,396	0,411	0,424	0,433	0,944	0,451	0,203	0,213	0,220	0,226	0,230	0,235
17	R	Widerstandszahl des Blockes C_B		0,716	0,709	0,703	0,698	0,694	0,689	0,716	0,709	0,703	0,698	0,694	0,689	0,831	0,825	0,820	0,816	0,813	0,810
18	R	Luftwiderstand des Blockes P_B	kg	1,24	2,14	3,31	4,70	6,36	8,26	1,22	2,14	3,30	4,70	6,35	8,26	1,24	2,15	3,48	4,78	6,46	8,45
19	V	Gesamter Luftwiderstand des Kühlers P	kg	1,78	3,07	4,73	6,72	9,14	11,70	1,48	2,56	4,00	5,55	7,41	9,65	1,93	3,18	4,84	6,78	9,28	12,20
20	R	Luftwiderstand des Rahmes einschließlich der Wasserkasten usw. P_R	kg	0,54	0,93	1,42	2,02	2,78	3,44	0,26	0,42	0,70	0,85	1,06	1,39	0,69	1,03	1,48	2,00	2,82	3,75
21	R	Widerstandszahl des Rahmens C_R		0,472	0,464	0,453	0,452	0,457	0,431	0,230	0,210	0,225	0,190	0,174	0,175	0,662	0,562	0,517	0,485	0,505	0,514
22	V	Widerstandszahl des ganzen Kühlers C		0,620	0,614	0,595	0,601	0,600	0,587	0,523	0,511	0,511	0,496	0,487	0,487	0,761	0,717	0,697	0,680	0,685	0,687

Zahlentafel 2.
Luftwiderstände verschiedener Körper.
(Nach den »Ergebnissen der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen« II. Lieferung, S. 22 bis 35, 68/69.)

Körper	Reynoldsche Zahl $R = \frac{W d}{\nu}$	Widerstandszahl C
Zylinder (Achse $\perp$ Strömungsrichtung) . . . . $\frac{d}{l} = \frac{1}{\infty}$	10^3 bis 2×10^5	1,0 bis 1,2
Derselbe . . . . $\frac{d}{l} = \frac{1}{\infty}$	2×10^5 bis 5×10^5	1,2 » 0,3
Derselbe . . . . $\frac{d}{l} = 0{,}2$	5×10^2 » 2×10^5	0,70 » 0,75
Derselbe . . . . $\frac{d}{l} = 0{,}2$	2×10^5 » 5×10^5	0,75 » 0,3
Derselbe . . . . $\frac{d}{l} = 0{,}5$ bis 1,0	$8{,}8 \times 10^3$	0,68 » 0,63
Kugel . . . . $d = 282{,}5$ mm	$2{,}5 \times 10^5$ bis 7×10^5	0,16 » 0,21
Verlängertes Rotationsellipsoid, Achse ‖ Strömungsrichtung $a/b = 360/200$	$2{,}5 \times 10^5$ » 6×10^5	0,06 » 0,09
Abgeplattetes Rotationsellipsoid, Achse S, Strömungsrichtung $a/b = 150/100$	5×10^5 bis 7×10^5	0,21
Kreisförmige Scheibe . . . . . . Durchmesser : Dicke = 100	4×10^3 bis 10^2	1,12
Rechteckige Platte . . . . . Breite zu Länge = 0,25 bis 1,0	—	1,2 bis 1,1
Stromlinienkörper mit rundem Querschnitt $F = 136$ cm², $W = 18{,}6$ cm/s¹	—	0,046
Stromlinienkörper mit quadratischem Querschnitt $F = 0{,}36$ cm², $W = 13{,}5$ cm/s¹	—	0,050
Prisma, Achse ‖ Strömungsrichtung Seitenlänge 13,6 cm, Höhe 34,5 cm	—	0,81

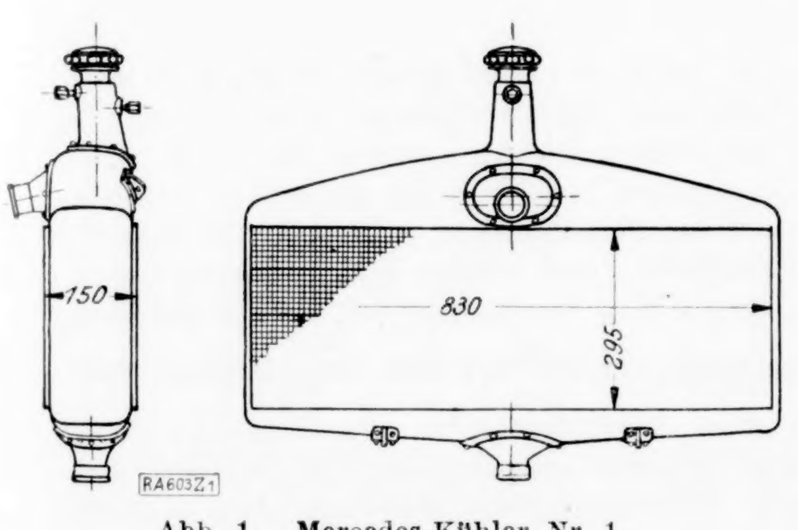
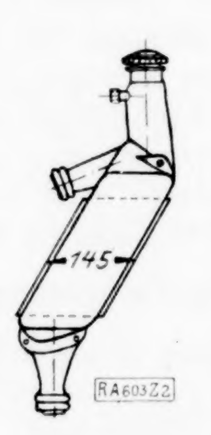


Abb. 1. Mercedes-Kühler Nr. 1.



830
190

Abb. 2. Mercedes-Kühler Nr. 2.

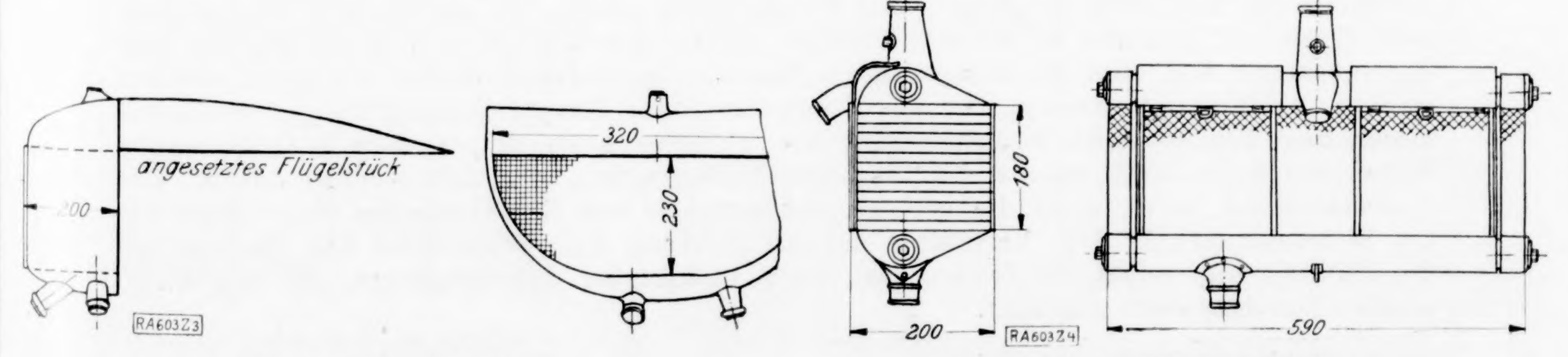


Abb. 3. Rumpler-Kühler.

Abb. 4. Windhoff-Kühler.

Der Windhoffkühler 4, dessen Röhrchen sich nach außen von d_i auf $d_e = d_a$ erweitern — für die Rechnung wurde die Länge des konischen Teiles $l_e = l_a = 10$ mm geschätzt — verlangt eine entsprechende Anpassung durch den Ansatz

$$\frac{W_f^2}{2g} = \xi_e \frac{W_e^2}{2g} + \left[\beta_e \frac{2\,l_e}{\frac{d_e + d_i}{2}} \left(\frac{W_e + W_i}{2}\right)^2 + \beta_i \frac{l_i}{d_i} W_i^2\right] + \xi_a \frac{W_a^2}{2g} + \frac{W_h^2}{2g} \quad . \quad . \quad (1\text{a}),$$

indem für die Berechnung des Reibungsverlustes im konischen Teile die arithmetischen Mittel der Durchmesser und Geschwindigkeiten im weitesten Querschnitt und innen benutzt werden.

Mit dem lichten Durchlaß im Ein- und Austritt $F_e = F_a$, den entsprechenden Durchlässigkeiten

$$\varphi_e = \varphi_a = \frac{F_e}{F_B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\text{a})$$

und

$$W_a = W_e = W_i \frac{F_i}{F_e} = W_i \frac{\varphi_i}{\varphi_e}$$

ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} p = \gamma \frac{W_f^2 - W_h^2}{2g} = \frac{W_i^2}{2g} \gamma \Bigg[& (\xi_e + \xi_a) \frac{\varphi_i^2}{\varphi_e^2} \\ & + 118{,}1\,(\gamma W_i)^{-0{,}148} \left\{ 2 \left(\frac{\varphi_e + \varphi_i}{2\,\varphi_e}\right)^{1{,}852} \left(\frac{d_e + d_i}{2}\right)^{-1{,}269} l_e + d_i^{-1{,}269}\, l_i \right\} \Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5\text{a})$$

und mit

$$\left.\begin{aligned} W_i^2 = W_f^2 : \Bigg[& (\xi_e + \xi_a) \frac{\varphi_i^2}{\varphi_a^2} \\ & + 118{,}1\,(\gamma W_i)^{-0{,}148} \left\{ \left(\frac{d_e + d_i}{2}\right)^{-1{,}269} 2 \left(\frac{\varphi_e + \varphi_i}{2\,\varphi_e}\right)^{1{,}852} l_e + d_i^{-1{,}269}\, l_i \right\} + \varphi_i^2 \Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (6\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{W_e^2}{2g} \gamma \frac{1}{1 + s} \\ s &= \varphi_i^2 : \Bigg[(\xi_e + \xi_a) \frac{\varphi_i^2}{\varphi_e^2} + 118{,}1\,(\gamma W_i)^{-0{,}148} \left\{ 2 \left(\frac{\varphi_e + \varphi_i}{2\,\varphi_e}\right)^{1{,}852} \left(\frac{d_e + d_i}{2}\right)^{-1{,}269} + d_i^{-1{,}269}\, l_i \right\} \Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (7\text{a}).$$

2. Einfluß der Maße des Kühlerblockes und der Luftgeschwindigkeit auf den Luftwiderstand und auf dessen Verhältnis zur Kühlleistung. Da die Gl. (7) und (7a) den Einfluß der Maße des Blockes und der Einzelröhrchen, sowie der Luft bzw. Fahrgeschwindigkeit nicht leicht überblicken lassen, wurden in Abb. 5 für einen Kühlerblock von 1 m² Stirnfläche mit Quadratröhrchen von 0,15 mm Wandstärke, 2 bis 15 mm innerer Seitenlänge und 25 bis 500 mm Länge und mit lotrechten 2 mm weiten Wasserdurchgängen die Widerstandszahlen C_B und Widerstände P_B, sowie das Verhältnis der Kühlleistungen zu den Widerständen $\frac{Q}{P_B}$ für eine Luftgeschwindigkeit von 10 m/s vor dem Kühler dargestellt; die Werte der Kühlleistung Q sind bei einer durchfließenden Wassermenge $M = 10\,000$ kg/h, einer Temperatur $t_{LE} = 20^\circ$ C und einem spezifischen Luftgewicht $\gamma_{LE} = 1200$ kg/m⁻³ der eintretenden Luft und einer Wassereintrittstemperatur $t_{WE} = 60^\circ$ C berechnet.[1])

Die Widerstandszahlen nehmen mit wachsender Röhrchenweite ab, mit wachsender Blocktiefe zu, und zwar langsamer mit zunehmender Länge; sie nähern sich asymptotisch dem Werte 1. Daß die bei ebenen Platten, welche den Grenzfall eines Blockes mit sehr engen, kurzen Röhrchen darstellen, durch Versuche gefundenen Werte > 1 nicht erreicht werden, erklärt sich daraus, daß die Entwicklung der Hauptgleichung einen Unterdruck hinter dem Blocke nicht berücksichtigt, der übrigens auch in praktisch vorkommenden Fällen durch die Luft, welche die Röhrchen durchstreicht, vernichtet werden dürfte. Der Luftwiderstand selbst zeigt die gleiche Abhängigkeit von Röhrchenweite und Länge wie die Widerstandszahl. Das Verhältnis der Kühlleistung zum Widerstand hat, ähnlich wie die Kühlleistung selbst, Größtwerte bei einer bestimmten Röhrchenlänge, die mit wachsenden Durchmessern zunimmt.

---

[1]) R, S. 308.

Aus Abb. 5 lassen sich die Folgerungen für die Konstruktion eines Kühlers mit möglichst kleinem Luftwiderstande bei vorgegebener Kühlleistung z. B. $Q = 20\,000$ kcal/h und Luftgeschwindigkeit $W_1 = 10$ m/s ziehen. Wählt man z. B. die Stirnfläche 0,25 m², so muß der Kühler auf 1 m² Stirnfläche 80 000 kcal/h übertragen. Im Schnittpunkt der 80 000-er-Linie der Abb. 5 mit den Q-Linien lassen sich die zugehörigen Kühlertiefen und durch Herunterloten auf die P_B-Linien die Widerstände bei verschiedenen Röhrchendurchmessern ablesen. Die auf diesem Wege gewonnenen Werte für verschiedene Stirnflächengrößen sind in der Abb. 6 eingetragen, welche zeigt, daß bezüglich des Luftwiderstandes Kühler mit kleiner Stirnfläche, aber großer Röhrchenweite und Blocktiefe günstig sind, allerdings bei verhältnismäßig großer Blocktiefe.

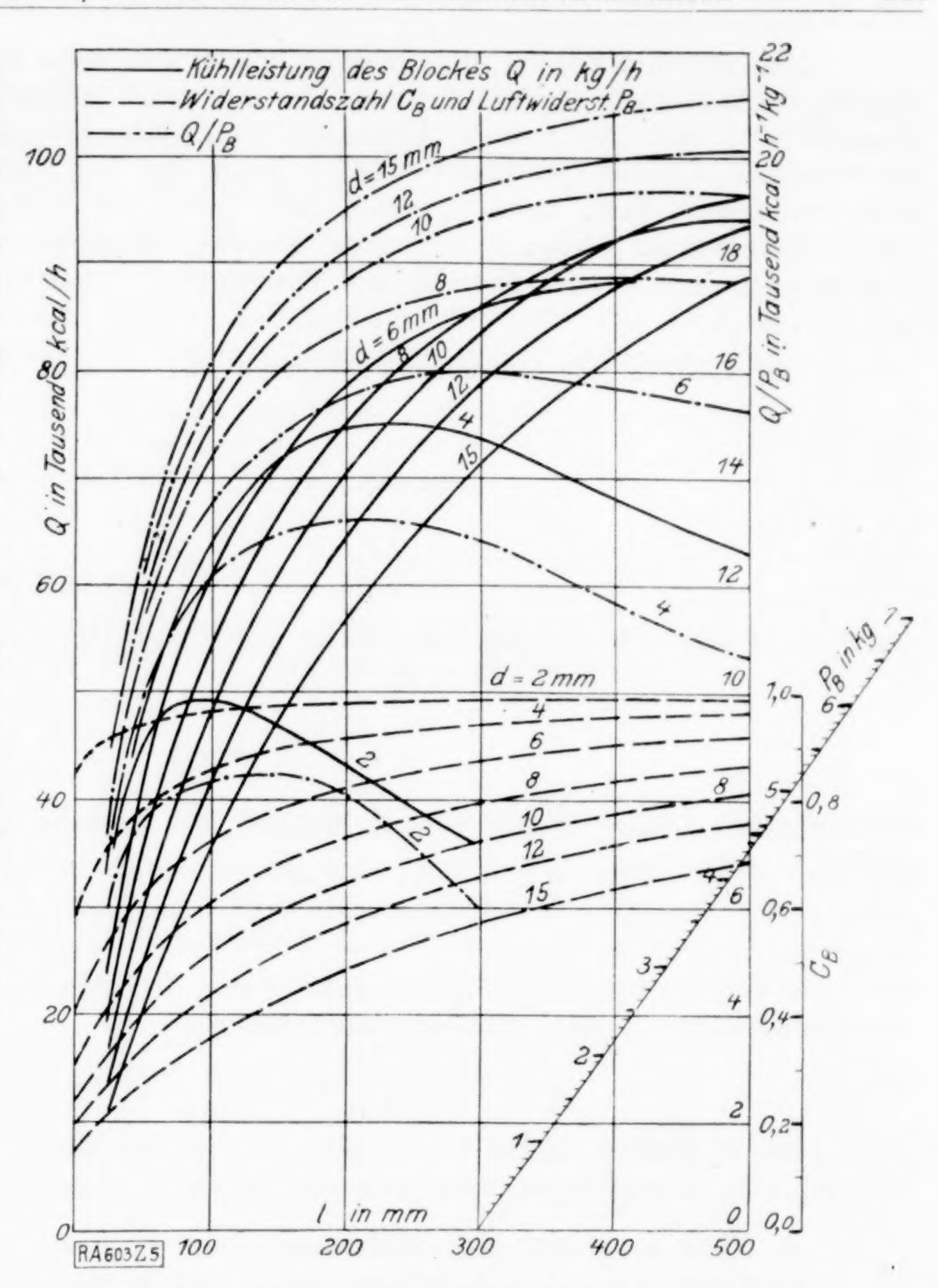


Abb. 5. Einfluß der Röhrenweite und Röhrenlänge.

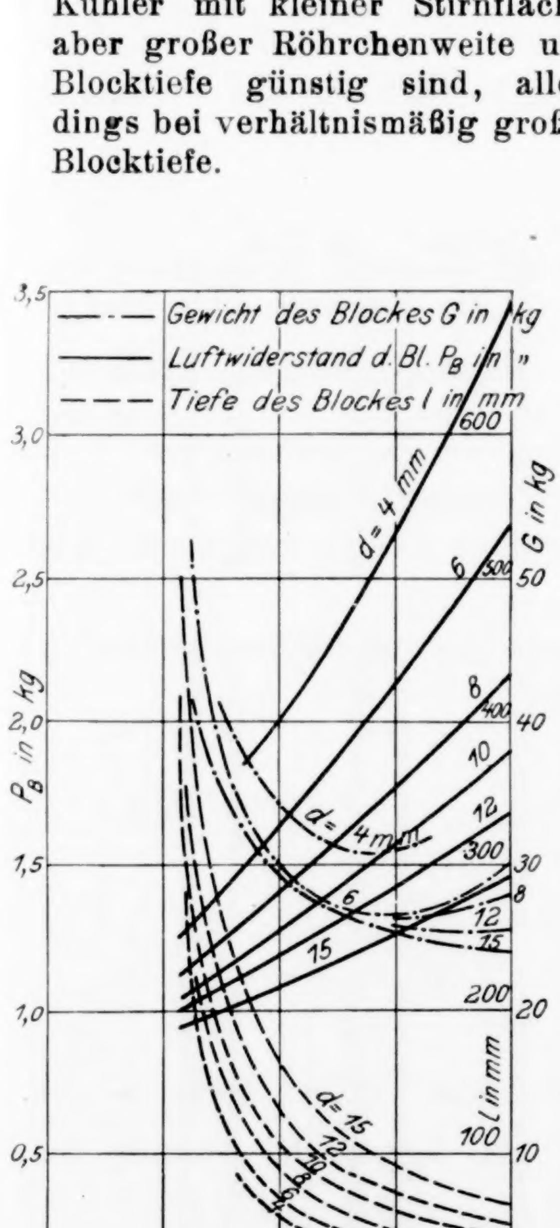


Abb. 6. Luftwiderstand, Kühlertiefe und Blockgewicht bei vorgegebener Kühlleistung $Q = 20\,000$ kcal/h und Luftgeschwindigkeit $W_f = 10$ m/s.

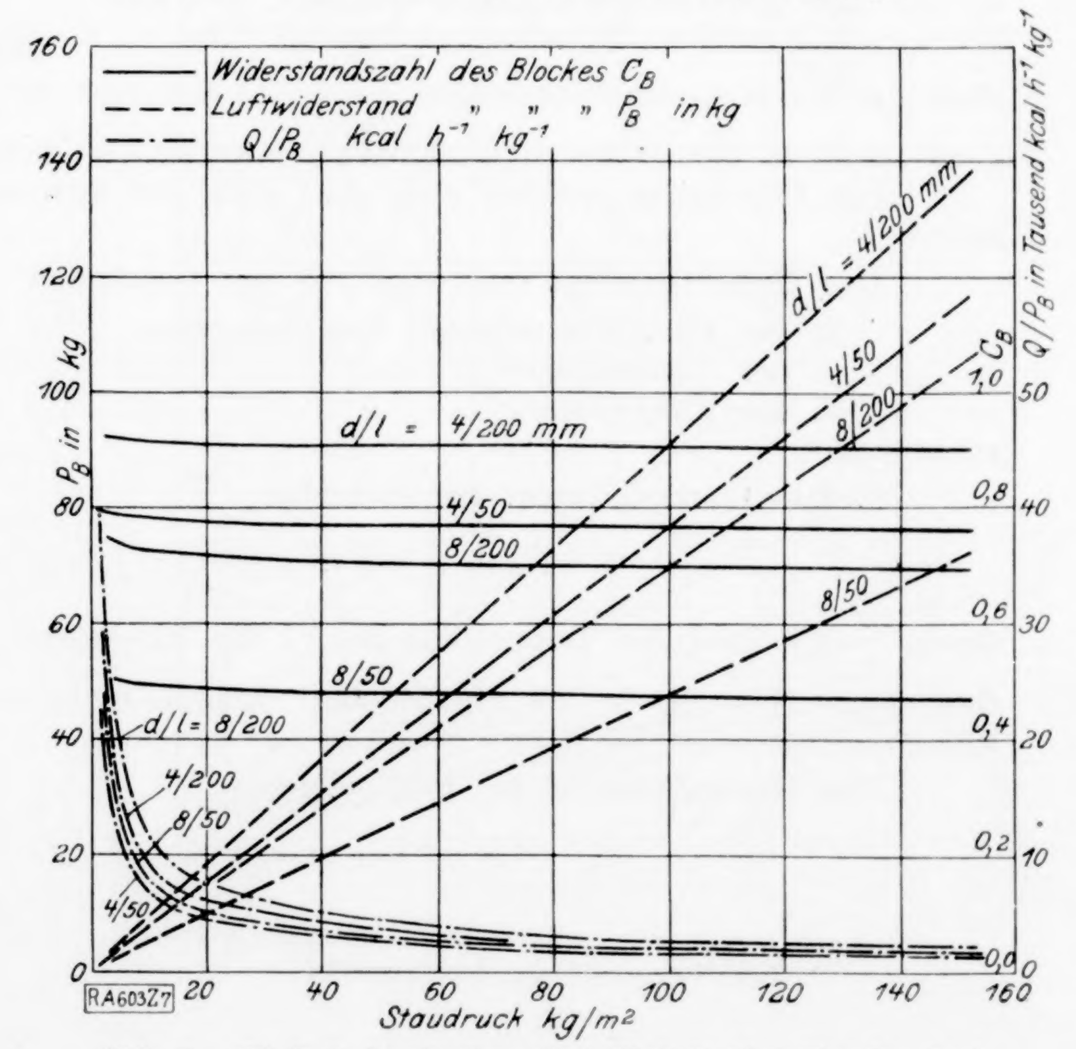


Abb. 7. Einfluß der Luftgeschwindigkeit (des Staudruckes).

Mit zunehmender Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler, bzw. Fahrgeschwindigkeit nimmt die Widerstandszahl langsam ab und zwar infolge des Gliedes (γW_i) in den Gleichungen (7) und (10); diese Abnahme ist größer bei kleinen Durchmessern und großen Blocktiefen. Dementsprechend wächst auch der Luftwiderstand nicht genau proportional dem Staudruck bzw. dem Quadrate der Luftgeschwindigkeit vor dem Kühler, sondern etwas langsamer. Abb. 7 erläutert dieses Verhalten. Dieses Ergebnis der Rechnung stimmt, wie aus den C-Werten der Zahlentafel 1 hervorgeht, auch mit der Beobachtung überein.

Der Einfluß der Luftgeschwindigkeit auf $\frac{Q}{C_B}$ läßt sich mit der Näherungsgleichung [1])

$$Q = A\, W_f^{\,r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12\,\mathrm{a})$$

mit

$$r = 0{,}85, \quad 0{,}7, \quad 0{,}5$$

bei

$$W_f = 2, \quad 20, \quad 50\ \mathrm{m/s}\,,$$

während A nur von der Röhrchenweite und Blocktiefe abhängt, auch analytisch darstellen.

$$\frac{Q}{P_B} = \frac{A\, W_f^{\,r}}{C_B \frac{W_f^2}{2\,g}\,\gamma\, F_B}\,.$$

Vernachlässigt man den geringen Einfluß der Luftgeschwindigkeit auf die Widerstandszahl und setzt man

$$\frac{\gamma\, 2g\, A}{C_B\, F_B} = B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12\,\mathrm{b}),$$

das von der Luftgeschwindigkeit sehr wenig beeinflußt wird, so läßt sich das Verhältnis der Kühlleistung zum Luftwiderstand durch

$$\frac{Q}{W_B} = B\, W_f^{\,r-2} = B_1\, q^{\frac{r}{2} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12\,\mathrm{c})$$

darstellen, woraus deutlich hervorgeht, daß dieser Wert mit zunehmender Geschwindigkeit kleiner, also ungünstiger wird und sich asymptotisch 0 nähert, wie dies auch Abb. 7 zeigt.

3. Das Gewicht des Kühlers. Den folgenden Betrachtungen über den Einfluß der Röhrchenmaße auf das Kühlerblock-Gewicht und dessen Verhältnis zur Kühlleistung ist ein aus quadratischen Doppelröhrchen aufgebauter Kühler der S. Rothmüller A.-G. Wien, von 1 m² Stirnfläche zugrundegelegt (Abb. 8), die Weite der vertikalen Wasserdurchlässe $a_W = 2$ mm, die Wandstärke $\frac{a}{2} = 0{,}15$ mm und die Lötfuge $g = 0{,}2$ mm, wurde, wie auch schon in den früheren Rechnungen unverändert gelassen.

Die Ergebnisse werden sich aber auch auf andere Blockkonstruktionen anwenden lassen.

Das Gesamtgewicht setzt sich aus den Gewichten

1. der Röhrchen und der Einlagebleche,
2. des Lötmateriales,
3. des Kühlwassers

zusammen.

1. Das Gesamtgewicht der Röhrchen

$$G_R = \frac{n}{2} \cdot (8\,d + 4\,a)\, l \cdot \frac{a}{2} \cdot s_M \ldots \mathrm{kg}\,,$$

worin $\frac{n}{2}$ die Zahl der Doppelröhrchen, l die Blocktiefe (wie alle anderen Maße für die Gewichtsberechnung in dm einzusetzen) und s_M in kg/dm³ das spezifische Gewicht des Röhrchenmateriales (für Messing $s_M = 8{,}55$) bedeutet.

Das Gesamtgewicht der Einlagebleche

$$G_E = 2\,(n_H - 1)\, b \cdot 10 \cdot \frac{a}{2}\, s_M \ldots \mathrm{kg}.$$

[1]) R, S. 311.

Sie werden aus $\frac{a}{2} = 0{,}15$ mm starken, $b = 10$ mm breiten Messingblechstreifen hergestellt. Ihre Zahl ist um l kleiner als die der Röhrchen einer Horizontalreihe n_H.

Das Gewicht des Messingbleches ist also $G_M = G_R + G_E$.

2. Lötmaterial wird gebraucht zum Verlöten der Längsnähte — für jede Naht wird ein Querschnitt von 0,3 m² angenommen — und zur Verbindung der Röhrchenreihen zum Blocke durch Tauchlötung, wobei eine in der Achsrichtung der Röhrchen beiderseits 6 mm tief reichende 0,2 mm starke Lötmittelschicht vorausgesetzt wird. Demnach ist

$$G_L = \left[\frac{n}{2} \cdot 3 \cdot \frac{0{,}3}{10^4} \cdot l + 2\, n \cdot 4\, d \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}002 + 2\,(1 - q_i)\, 100 \cdot 0{,}002\right].$$

mit dem spezifischen Gewichte $s_L = 9{,}7$ kg/dm³ des Lötzinnes.

3. Das Wassergewicht

$$G_W = (n_H - 1) \cdot 0{,}002 \cdot l \cdot 10\,,$$

wobei angenähert der durch die Falze verlorene Raum dem durch die kleinen Erweiterungen an den Berührungsstellen der Röhrchen gewonnenen gleich gesetzt ist.

Das Gesamtgewicht des Blockes

$$G = G_R + G_E + G_L + G_W$$

und das Verhältnis der Kühlleistung zum Gewicht $\frac{Q}{G}$ bei 10 m/s Luftgeschwindigkeit ist abhängig von den Abmessungen der Röhrchen in der Abb. 9 für einen Rothmüller-Quadratröhrchenkühler ($F_B = 1 \times 1$ m², $l = 100$ mm, $a = 0{,}30$ mm, $a_W = 2$ mm, $g = 0{,}2$ mm, $M = 10\,000$ kg/h, $\gamma_{LE} = 1{,}20$ kg/m³, $t_{WE} - t_{LE} = 60^0 - 20^0$ C) dargestellt. Das Gesamtge-

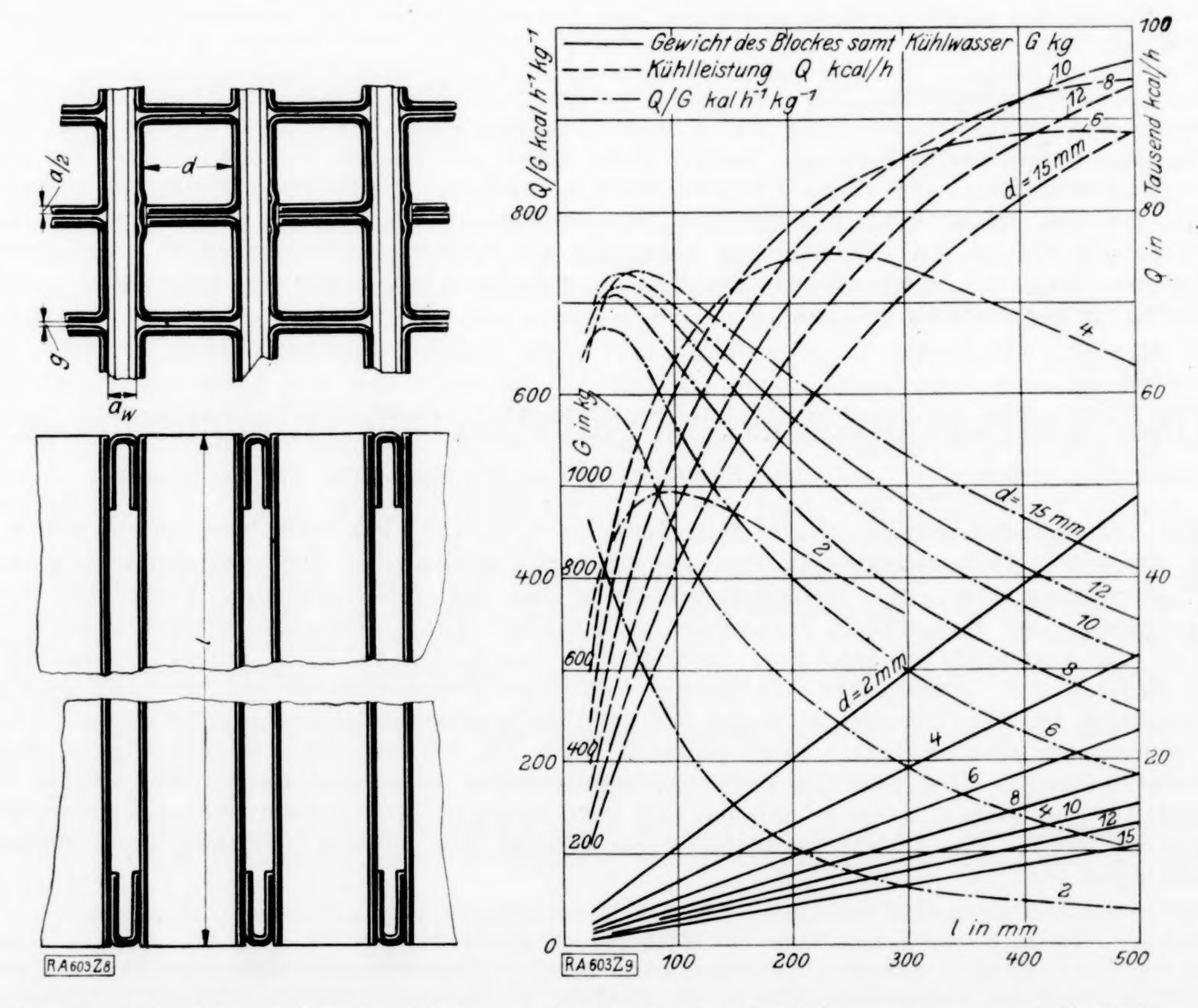


Abb. 8. Rothmüller-Quadratröhrenblock.

Abb. 9. Einfluß der Rohrabmessungen auf die Kühlleistung und das Blockgewicht.

wicht nimmt mit zunehmender Röhrchenweite ab, ebenso das Verhältnis $\frac{Q}{G}$; ferner nimmt G nahezu linear mit der Röhrchenlänge zu, während $\frac{Q}{G}$ Größtwerte bei ungefähr $l \sim 80$ mm zeigt.

Auf dem im 1. Abschnitt angegebenen zeichnerischen Wege wurde auch versucht, Folgerungen für die Konstruktion eines Kühlers mit kleinstem Gewicht bei vorgegebener Kühlleistung $Q = 20\,000$ kcal/h und der Luftgeschwindigkeit 10 m/s zu ziehen. Die G-F_B Linien in Abb. 6 zeigen bei unverändertem d Kleinstwerte, die sich mit zunehmendem d weiter verkleinern und in die Richtung größerer Stirnflächen rücken, so daß also bezüglich des Gewichtes Kühlerblöcke mit großen Röhrchenweiten und Stirnflächen günstig erscheinen; die l-F_B-Linien zeigen, daß dies gleichzeitig kleine Röhrchenlängen bedingt.

Da andererseits, wie ebenfalls Abb. 6 zeigt, kleine Luftwiderstände kleine Stirnflächen und große Röhrchenlängen bedingen — ebenfalls bei großen Röhrchenweiten —, so erscheint für die Beurteilung der Flugzeugkühler eine Wertungsziffer erforderlich, die das Gewicht und den Luftwiderstand des Kühlers bei gegebener Fluggeschwindigkeit in ein Verhältnis zu der auf ihn entfallenden Motorleistung bringt.

Hierfür wurde im Bericht des Wiener Motorenwerkes [1]) ein Gütegrad

$$E = \frac{\dfrac{Q}{t_{WE} - t_{LE}}}{P + \dfrac{Z-P}{F}\,G} \text{ kcal } {}^0\text{C}^{-1}\,\text{kg}^{-1}$$

vorgeschlagen; darin bedeutet Z den Schraubenzug, F das Flugzeuggewicht, P den Luftwiderstand und G das Gewicht des Kühlers in kg. Der Gütegrad ist natürlich vor allem von der Fluggeschwindigkeit abhängig; seine weitere Zergliederung erscheint hier nicht am Platze, da diese im Zusammenhang mit der Bewertung des betreffenden Flugzeuges erfolgen muß.

4. Die Kosten. Für die Praxis wäre schließlich auch die Beantwortung der Frage von Wert, welche Maße der Kühlerblock bei einer bestimmten Bauart und unter gegebenen Betriebsbedingungen haben muß, damit die Kosten der Herstellung bei vorgegebener Kühlleistung einen kleinsten Wert annehmen. Die Methode hierfür ist dieselbe, die für die Ausmittlung des Kühlers mit kleinstem Gewicht angegeben wurde. Die Ersparnis, die bei Reihenherstellung besonders von Kraftwagenkühlern durch eine genaue Untersuchung und entsprechende Benennung erzielbar wäre, dürfte eine gründliche Durchrechnung ausreichend belohnen. 603

Über Randwertaufgaben bei partiellen Differenzengleichungen.

Von **R. COURANT** in Göttingen.

Im vorliegenden Bande dieser Zeitschrift (S. 118—150) hat sich Herr Wolf mit den partiellen Differenzengleichungen beschäftigt, welche der Differentialgleichung des Potentiales bzw. der Differentialgleichung für die biharmonischen Funktionen entsprechen. Der Hauptinhalt der Arbeit ist die Erbringung eines Konvergenzbeweises für ein von verschiedenen Autoren, insbesondere Herrn Liebmann, früher angegebenes Verfahren zur numerischen Auflösung von Randwertproblemen bei der Differenzengleichung zweiter Ordnung, während bei der biharmonischen Differenzengleichung vierter Ordnung ein solcher Beweis nicht erbracht wird. Da ich selbst im Verlaufe allgemeinerer Untersuchungen über partielle Differenzengleichungen mich auch mit jenem Auflösungsverfahren beschäftigt habe, möchte ich hier kurz darlegen, wie sich ein solcher Konvergenzbeweis sowohl für Differenzengleichungen zweiter wie höherer Ordnung recht einfach erbringen läßt.[2])

[1]) Pülz, Kühlung und Kühler für Flugmotoren, Berlin 1920, S. 39.

[2]) Im übrigen verweise ich wegen einer zusammenhängenden Darstellung des ganzen Gegenstandes auf meine Abhandlung: »Ueber die Theorie der linearen partiellen Differenzengleichungen«, Göttinger Nachrichten, 23. Okt. 1925, sowie auf den in Vorbereitung befindlichen Band 2 von Courant-Hilbert: »Methoden der mathematischen Physik«. Ferner auf H. Lewy: »Ueber einen Ansatz zur

1. Allgemeine Bemerkungen über partielle Differenzengleichungen. Der Betrachtung, welche wir zur Fixierung der Vorstellung auf zwei unabhängige Veränderliche x,y beziehen, möge ein quadratisches Punktgitter mit der Maschenweite 1, etwa das System der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten x,y zugrunde liegen. Eine Menge von Gitterpunkten bildet ein Gittergebiet, wenn sich je zwei Punkte der Menge durch eine solche zur Menge gehörige Kette von Punkten verbinden lassen, daß jeder folgende Punkt von dem vorangehenden den Abstand 1 besitzt. Randpunkt eines Gittergebietes heißt jeder Punkt, für den nicht mehr alle vier Nachbarpunkte dem Gebiete angehören. Der Rand R' eines Gittergebietes G besteht aus allen Randpunkten, der Randstreifen R'' aus allen Randpunkten sowie aus allen zu Randpunkten benachbarten Punkten des Gebietes. Das Gebiet mit Ausschluß des Randes R' bezeichnen wir mit G', das Gebiet mit Ausschluß des Randstreifens mit G''.

Die Randwertaufgaben der in der Mechanik und Physik auftretenden partiellen Differenzengleichungen sind stets aufs engste mit gewissen Minimumproblemen verknüpft; insbesondere ergibt sich die Randwertaufgabe der Potentialdifferenzengleichung als äquivalent mit dem folgenden Minimumproblem: Unter allen in dem Gittergebiete G definierten Funktionen $w(x,y)$, deren Werte auf dem Rande R' vorgeschrieben sind, ist eine solche, $u(x,y)$, gesucht, für welche die über das ganze Gittergebiet G erstreckte Summe

$$D[w] = \Sigma\Sigma\, \delta[w]^2$$

möglichst klein wird. Dabei verstehen wir unter $\delta[w]$ die Differenz der Funktionswerte von w in einem Punkte x,y und einem seiner Nachbarpunkte, und die obige Summe ist über alle Paare solcher Nachbarpunkte des Gebietes G zu erstrecken. Das Minimumproblem verlangt also, die Summe der Quadrate der Schwankungen möglichst klein zu machen.

Dieses Minimumproblem muß nach einem Fundamentalsatz der Analysis sicherlich eine Lösung u besitzen, da die Summe $D[w]$ eine stetige, nach unten beschränkte Funktion der endlich vielen, zum Gebiete G gehörigen Funktionswerte $w(x,y)$ ist und da der Wert der Summe, wie man sehr leicht erkennt, über alle Grenzen wächst, wenn bei festgehaltenen Randwerten irgend einer der Funktionswerte im Inneren hinreichend groß gemacht wird. Diese Lösung u muß notwendig die Lösung der Randwertaufgabe der »harmonischen Differenzengleichung«

$$\Delta u = u(x+1,y) + u(x-1,y) + u(x,y+1) + u(x,y-1) - 4\,u(x,y) = 0 \quad (1)$$

sein. In der Tat folgt aus der Minimumforderung unmittelbar das Bestehen der Gl. (1) für jeden inneren Punkt von G aus dem Umstande, daß bei vier gegebenen Werten ein fünfter dann eine möglichst kleine Quadratsumme der Differenzen gegen die vier ersten besitzt, wenn dieser fünfte Wert das arithmetische Mittel aus den vier ersten ist; dies aber ist für einen Punkt von G und seine vier Nachbarpunkte genau die Aussage der Differenzengleichung $\Delta u = 0$. Die Gl. (1) entsteht auch, wenn man sich die Summe $\Sigma\Sigma\delta[w]^2$ durch die u-Werte ausgedrückt denkt und ihre Ableitung nach $u(x,y)$ Null setzt.

Im übrigen sei bemerkt, daß man die Theorie der Differenzengleichung (1) am besten systematisch mit Hilfe der Greenschen Formel behandelt, welche folgendermaßen lautet:

$$D(w,v) = \Sigma\Sigma\, \delta[w]\,\delta[v] = -\sum_{G'}\sum v\,\Delta w + \sum_{R'} v\,A[w] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dabei bedeuten w und v Funktionen im Gittergebiete G; die Doppelsumme rechts ist über das System G' der inneren Punkte, die einfache Summe über den Rand R' zu erstrecken; $A[w]$ ist ein Ausdruck, welcher von den Werten von w in je zwei benachbarten Punkten aus dem Randstreifen abhängt und den wir nicht im einzelnen anzugeben brauchen.

Diese Formel ergibt sich ohne weiteres durch partielle Summation der linksstehenden Summe.

---

numerischen Lösung von Randwertproblemen« und R. Courant: »Bemerkungen zur numerischen Auflösung von Randwertproblemen, die aus der Variationsrechnung entspringen«, Göttinger Nachrichten 1926, S. 111 ff.

Nachträglich werde ich darauf aufmerksam, daß die Frage der Potentialdifferenzengleichung schon in einer Abhandlung von H. B. Philipps und N. Wiener: »Nets and the Dirichlet Problem«, Publications of the Mass. Institute of Technology, 1925, behandelt worden ist. Ebenso habe ich erst nachträglich bemerkt, daß eine Abhandlung von Herrn R. G. D. Richardson: »A New Method in Boundary Problems for Differential Equations«, Transactions Am. Math. Soc. Bd. 18 (1917), S. 489 ff. gewisse Berührungspunkte mit meinen eigenen Untersuchungen aufweist.

2. Konvergenzbeweis für das Liebmannsche Verfahren. Das fragliche Verfahren zur numerischen Lösung der Randwertaufgabe ist im wesentlichen folgendes: Man zähle die inneren Punkte des Gebietes G in irgendeiner Reihenfolge auf, wobei diese Aufzählung unter Wiederholung der einzelnen Punkte ins Unendliche fortgesetzt wird, sodaß dabei jeder Punkt immer wieder vorkommt; der Bequemlichkeit halber wollen wir voraussetzen, daß die Punkte sich zwar nicht periodisch zu wiederholen brauchen, daß aber bei höchstens N aufeinanderfolgenden Schritten jeder Punkt von G mindestens einmal erfaßt wird, unter N eine geeignet gewählte feste Zahl verstanden. Die so aufgezählten Punkte bezeichnen wir der Reihe nach mit $P_0, P_1, P_4 \dots$.

Nunmehr gehen wir von einer beliebigen, den Randbedingungen genügenden Anfangsfunktion w^0 aus und ersetzen den Wert von w^0 im Punkte P_0 durch das arithmetische Mittel der vier Nachbarwerte. Die so in nur einem Punkte abgeänderte Funktion bezeichnen wir mit w^1 und bemerken, daß die angebrachte Korrektion an der Stelle P gerade

$$w^1 - w^0 = {}^1/_4 \, \Delta w^0$$

beträgt. Jetzt ändern wir die Funktion w^1 im Punkte P_1 nach der obigen Vorschrift ab und gelangen so zu einer Funktion w^2; indem wir so unbegrenzt fortfahren, erhalten wir eine Funktionenfolge $w^0, w^1, w^2 \dots,$ von der wir behaupten, daß sie gegen eine Grenzfunktion u, die Lösung unserer Randwertaufgabe, konvergiert.

Der Beweis ergibt sich leicht durch Betrachtung der Werte $D[w^i]$. Wie man sofort erkennt, gilt

$$D[w^{(i+1)}] \leq D[w^i],$$

und zwar ist genau[1])

$$D[w^{(i+1)}] = D[w^i] - {}^1/_4 \, (\Delta w^i)^2,$$

wobei der Ausdruck Δw^i für den Punkt P_i zu nehmen ist. Die Zahlen $D[w^i]$, die demnach eine abnehmende, nach unten beschränkte Folge darstellen, müssen einem bestimmten Grenzwert d zustreben. Daher müssen die obigen Zahlen Δw^i mit wachsendem Index i gegen Null konvergieren.

Da die Korrektion beim Uebergang von w^i zu w^{i+1} an der Stelle P_i gerade ${}^1/_4 \, \Delta w^i$, an den von P_i verschiedenen Punkten Null beträgt, so werden alle diese Korrektionen bei wachsendem Index i selbst gegen Null konvergieren; es werden daher bei festem N die aufeinanderfolgenden Funktionen $w^i \; w^{(i+1)} \; w^{(i+2)} \dots w^{(i+N)}$ sich überall bei hinreichend großem i nur um eine beliebig kleine Zahl unterscheiden, und dasselbe gilt infolgedessen auch für die zugehörigen Differenzenausdrücke $\Delta w^{(i+h)}$ $(h = 0, 1 \dots N)$ an allen Stellen von G. Daraus folgt, daß überall in G bei hinreichend großem i der Ausdruck Δw^i beliebig klein ist. Es ist somit auch für die Funktion $\zeta = w^i - w^k$ der Ausdruck $\Delta \zeta$ beliebig klein, sobald nur i und k hinreichend groß gewählt werden.

Diese Funktion ζ verschwindet auf dem Rande R', und daher ergibt die Greensche Formel hier

$$D[\zeta] = - \sum_{G'}\sum \zeta \, \Delta \, \zeta.$$

Da die Werte von ζ selbst jedenfalls absolut genommen unterhalb einer festen von i und k unabhängigen Schranke liegen, so muß die rechte Seite bei wachsendem i und k mit Rücksicht auf die Kleinheit von $\Delta \zeta$ gegen Null konvergieren, und dasselbe gilt somit für $D[\zeta]$. Da aber die Funktionen ζ am Rande sämtlich verschwinden, so folgt daraus unmittelbar, daß überall in G bei wachsendem i und k die Differenz $w^i - w^k$ selbst gegen Null konvergiert, und das war die zu beweisende Konvergenzbehauptung. Daß die Grenzfunktion $u = \lim\limits_{i \to \infty} w^i$ der Differenzengleichung (1) genügt, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß Δw^i bei hinreichend großem i beliebig klein ist.

Genau die entsprechenden Betrachtungen führen bei der »biharmonischen Differenzengleichung«

$$\Delta \Delta u = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

zum Ziele. Bei der einfachsten hierhergehörigen Randwertaufgabe sind nicht nur die Werte von u auf dem Rande R', sondern im ganzen Randstreifen R'' vorgeschrieben.

Das Minimumproblem, welches mit dieser Randwertaufgabe äquivalent ist, lautet: Es ist unter allen Funktionen $w(x, y)$, welche im Randstreifen vorgegebene Werte besitzen, diejenige, u gesucht, für welche die Summe

$$\sum_{G'}\sum (\Delta w)^2 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

[1]) Man stellt dies entweder durch direkte Ausrechnung oder durch Anwendung der Greenschen Formel (2) ohne Schwierigkeit fest.

möglichst klein wird. Die entsprechende Greensche Formel lautet:

$$\sum_{G'}\sum \Delta w \, \Delta v = -\sum_{G''}\sum v \, \Delta \, \Delta \, w + \sum_{R''} v \, A[w] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dabei ist die Summe links über das ganze System der inneren Punkte von G, die erste Summe rechts über alle dem Randstreifen R'' nicht angehörigen Punkte von G, die zweite Summe über den Randstreifen zu erstrecken, und der Faktor $A[w]$ bedeutet einen Ausdruck, welcher lediglich von den Funktionswerten von w in dem Randstreifen und in Nachbarpunkten des Randstreifens abhängt und dessen nähere Struktur für unsere Zwecke ohne Belang ist.

Aus der Formel (2) schließt man leicht, daß aus der Beschränktheit des Ausdruckes (4) bei vorgegebenen Werten im Randstreifen auch die Beschränktheit der absoluten Werte von w folgt. Sodann verläuft die Behandlung der biharmonischen Differenzengleichung vollständig analog den obigen Ausführungen, sodaß ich die Schilderung des numerischen Verfahrens und den Konvergenzbeweis nicht weiter auszuführen brauche.

3. Verallgemeinerungen. Was die Verallgemeinerungen auf andere Randwertprobleme der obigen Differenzengleichungen betrifft, so genügt die Bemerkung, daß sie sich aus analogen Minimumproblemen wie oben ergeben und an deren Hand sich entsprechend erledigen lassen. Z. B. erfolgt die Behandlung der zweiten Randwertaufgabe der harmonischen Differenzengleichung (1) sinngemäß im Anschluß an das Minimumproblem:

$$\sum\sum \delta[w]^2 + \sum_{R'} f w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

zum Minimum zu machen, wobei f eine Funktion auf dem Rande R' bedeutet, welche der Bedingung

$$\sum_{R'} f = v$$

genügen muß, damit der Ausdruck (6) nach unten beschränkt bleibt und somit das Minimumproblem und das äquivalente Randwertproblem einen Sinn erhält.

Weiter sei darauf hingewiesen, daß die dargelegten Ueberlegungen sich ohne weiteres auf alle partiellen Differenzengleichungen übertragen lassen, welche aus definiten Minimumproblemen entspringen (elliptische, selbstadjungierte Differenzengleichunen).

Endlich sei noch eine Bemerkung über das Verhältnis des behandelten Näherungsverfahrens zu Operationen der klassischen Potentialtheorie angefügt. Man kann das Liebmannsche Verfahren als Uebertragung der klassischen Balayagemethode von Poincaré auffassen und wird hierdurch dazu geführt, das Verfahren ein wenig zu verallgemeinern. Nimmt man nämlich an, daß man die Randwertaufgabe der Differenzengleichung für ein gewisses spezielles Gebiet lösen kann, was z. B. für ein Rechteck leicht durch explizite Formeln möglich ist, so kann man an Stelle der oben ausgeführten Mittelbildungen die fortlaufende Lösung der Randwertaufgabe für eine unendliche Folge sich immer wiederholender und das gegebene Gebiet G dachziegelartig überdeckender Gebiete setzen. Die obigen Konvergenzbetrachtungen führen auch dann in unveränderter Weise zum Ziele. Wird das gegebene Gebiet in der angegebenen Weise nur durch zwei Gebiete erzeugt, so erhält man das Analogon des Schwarzschen alternierenden Verfahrens. Diese Bemerkungen weisen uns übrigens auf die Tatsache hin, daß die fraglichen Konvergenzbeweise z. B. auch geführt werden können, indem man die klassischen Gedankengänge der Potentialtheorie auf den Fall der Differenzengleichungen überträgt.

671

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkungen zur angenäherten Wurzelberechnung. In den Lehrbüchern der angewandten Mathematik[1]) wird die seit langer Zeit bekannte[2]) Newtonsche Näherungsmethode zur Berechnung der Quadratwurzel aus der binomischen Formel mit entsprechender Fehlerabschätzung abgeleitet. Diese Feststellung hat von praktischer Seite den Mangel, daß ein voraus zu bestimmender erster Näherungswert die Hauptrolle spielt. Solche Näherungsmethoden müssen deshalb zu Iterationsprozessen ausgebildet werden und zwar in der Weise, daß der Erfolg des Prozesses von dem Ausgangswert unabhängig sei. Dies hat dann auch den weiteren praktischen Nutzen, daß ein Rech-

[1]) Zum Beispiel Runge-König, »Numerisches Rechnen« S. 29, Sanden, »Praktische Analysis« S. 41.

[2]) Ueber die verschiedenen Verwendungsformen in der alten Mathematik, s. Smith, »History of Mathematics«, Bd. II, S. 253.

nungsfehler die Kette nicht stört, da in solchen Fällen eigentlich nur ein neuer Anfangswert eingetreten ist. Nachdem Nicoletti[1]) die quadratischen Iterationsprozesse ganz allgemein auf projektiv-geometrischer Grundlage und streng analytisch untersucht hat, erscheint es als gerechtfertigt, diesen allereinfachsten Fall gleich von Anfang an als Iterationsprozeß mit beliebigem Anfangswert darzustellen, wie dies bereits Whittaker und Robinson in ihrem neuen Lehrbuche[2]) getan haben.

Wir wollen im Folgenden vorerst den Newtonschen Prozeß in diesem Sinne beleuchten und erstreben dabei eine womöglich einfachste Behandlungsweise[3]). — Als nächster Sonderfall erscheint bei Nicoletti jener Dedekindsche Algorithmus, welcher in dem berühmten Beweis von der Existenz irrationaler Schnitte auf S. 14 des Werkes: »Stetigkeit und irrationale Zahlen« eintritt. In der zweiten Bemerkung soll für diesen Prozeß der alte Weg betreten und gezeigt werden, wie der Dedekindsche Ansatz als Näherungsformel aus der binomischen entwickelt werden kann; es hat manches theoretische Interesse, dem Ursprung dieses klassischen Falles auch von dieser Seite her nachzugehen.

1. Die Newtonsche Iteration zur angenäherten Berechnung von $\sqrt{a}$. Es bedeute x_0 einen beliebigen Ausgangswert; $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ seien die fortlaufenden iterierten Werte; das Wurzelzeichen stelle den positiven Wert dar und die Betrachtung sei auf das reelle Gebiet beschränkt. Wir untersuchen die Größeneigenschaften des Prozesses an den absoluten Werten der x, mit Weglassung des Zeichens für die absoluten Werte.

Da

$$\frac{a}{x} \gtrless \sqrt{a} \quad \text{je nachdem} \quad x \lesseqgtr \sqrt{a},$$

so folgt, daß das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = \frac{x^2 + a}{2\,x}$$

zu $\sqrt{a}$ absolut näher liegt, als der Ausgangswert x. Der Iterationsprozeß sei also durch die Beziehung

$$x_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

festgesetzt. Dieser arithmetische Mittelwert x_k ist nun größer als der geometrische Mittelwert

$$\sqrt{\frac{a}{x_{k-1}}\, x_{k-1}} = \sqrt{a},$$

so daß

a) $x_k > \sqrt{a}$,

der Prozeß ist also stets in einer Richtung einseitig und zwar ist

b) $x_0 \lesseqgtr x_1 > x_2 > x_3 \ldots > x_{k-1} > x_k > \ldots$

je nachdem $x_0 \lesseqgtr \sqrt{a}$.

Die Grenzwertbetrachtung erfolgt am einfachsten, wenn man den allgemeinen Nicolettischen Definitionsansatz für diesen speziellen Fall verwertet (ähnlich bei Whittaker-Robinson). Es ist

$$x^2_{k-1} - 2\,x_k\,x_{k-1} + a = 0$$

und hieraus

$$(x_{k-1} \mp \sqrt{a})^2 = 2\,x_{k-1}\,(x_k \mp \sqrt{a})$$

das heißt:

$$\frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_{k-1} - \sqrt{a}}{x_{k-1} + \sqrt{a}}\right)^2 = \ldots = \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^k}.$$

Je nachdem also $x_0 \gtrless 0$, wird für $k \to \infty$ entweder der positive oder der negative Quadratwurzelwert als Grenzwert entstehen[1]).

2. Der Dedekindsche Ansatz. In Form eines Iterationsprozesses geschrieben ist der Ansatz:

$$x_k = \frac{x^3_{k-1} + 3\,a\,x_{k-1}}{3\,x^2_{k-1} + a}.$$

Bei der Dedekindschen Beweisführung ist wesentlich, daß dieser Prozeß für die absoluten Werte der x ein von unten oder ein von oben einseitiger ist, je nachdem $x_0 \lesseqgtr \sqrt{a}$[2]). Die Grenzbetrachtung erfolgt wie früher: Es ist

$$3\,x^3_{k-1} - 3\,x_k\,x^2_{k-1} + 3\,a\,x_{k-1} - a\,x_k = 0$$

woraus mit einiger Rechnung:

$$(x_{k-1} \mp \sqrt{a})^3 = (3\,x^2_{k-1} + a)\,(x_k \mp \sqrt{a})$$

also[3])

$$\frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{3^k}.$$

Wir wollen nun zeigen, wie der Dedekindsche Ansatz als Näherungsformel aus der binomischen entsteht. Wir benutzen hierzu eine Näherungsmethode für die $n$te Wurzel aus einer positiven Zahl, welche in englischen Lehrbüchern (z. B. Baker and Bourne: »Elementary Algebra« S. 422) zu finden ist.

Es sei x_0 ein voraus bestimmter erster Näherungswert, d. h.

$$\sqrt[n]{a} = x_0 + \xi$$

---

[1]) Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, XLII (1917), S. 73 bis 79.

[2]) »The Calculus of observations«, S. 80.

[3]) Eine weitläufige Behandlung s. bei Netto, »Elementare Algebra«, § 22; eine allgemeine strenge Durchführung bei Hurwitz, Math. Ann. LXX (1910), S. 33/34.

[1]) Mit Ausdehnung auf das komplexe Gebiet (s. bei Nicoletti) gestaltet sich diese Grenzbetrachtung vollständiger.

[2]) Siehe hierüber Dedekind a. a. O., Der stets nach einer Richtung einseitige einfachere Newtonsche Prozeß hätte also beim Beweis nicht Verwendung finden können.

[3]) Diese Definitionsgleichung führt dann bei Nicoletti zu den höheren Sonderfällen, die auch direkt aus den beiden ersten abzuleiten sind; z. B. ist der nächste Sonderfall die doppelt iterierte Newtonsche Formel, da in der Definitionsgleichung rechts die vierte Potenz auftritt, usf.

wobei ξ so klein sei, daß $a - x_0^n$ neben a und x_0^n genügend klein ausfalle. Dann schreiben wir:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{x_0^n}} = \sqrt[n]{\frac{(a+x_0^n)+(a-x_0^n)}{(a+x_0^n)-(a-x_0^n)}} = \left[\frac{1+\frac{a-x_0^n}{a+x_0^n}}{1-\frac{a-x_0^n}{a+x_0^n}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\sim \frac{1+\frac{a-x_0^n}{n(a+x_0^n)}}{1-\frac{a-x_0^n}{n(a+x_0^n)}} = \frac{(n+1)\,a+(n-1)\,x_0^n}{(n-1)\,a+(n+1)\,x_0^n}.$$

Wir erhalten also für die neue Annäherung:

$$x_1 = x_0 \frac{(n+1)\,a+(n-1)\,x_0^n}{(n-1)\,a+(n+1)\,x_0^n}.$$

(Als Näherungsformel schwächer, als die Newtonsche.)

Nehmen wir in dieser allgemeinen Formel $n = 2$, so gelangen wir zum Dedekindschen Ansatz:

$$x_1 = x_0 \frac{3\,a + x_0^2}{a + 3\,x_0^2} = \frac{x_0^3 + 3\,a\,x_0}{3\,x_0^2 + a}.$$

Führt man die Annäherung in der binomischen Formel um einen Schritt weiter, so ergibt sich für $n = 2$:

$$x_1 = \frac{3\,x_0^5 + 18\,a\,x_0^3 + 11\,a\,x_0^2}{11\,x_0^4 + 18\,a\,x_0^2 + 3\,a^2};$$

ein Prozeß, der nicht in die Nicolettische Klasse gehört.

Budapest. Karl Goldziher. 660

Nomogramme für Kapitaltilgungen. Für die roh angenäherte Ausführung finanztechnischer Rechnungen, etwa zum Zweck einer raschen quantitativen Skizzierung eines Finanzprojekts, sind graphische Rechentafeln zu Formeln der Zinseszins- und Rentenrechnung brauchbar. Die vor einigen Jahren in Frankreich erschienenen kleinen Sammlungen solcher Nomogramme[1]) behandeln hauptsächlich Zinseszinsformeln, die durch ein- oder zweimaliges Logarithmieren auf eine für die nomographische Behandlung sehr einfache Form zu bringen sind. Etwas anders liegt die Sache für die Formeln der Rentenrechnung. Die beiden hier abgebildeten Figuren sind die Gerippe von »Flächenschiebern«[2]) für die Formeln

$$a = A\,\frac{q^n\,(q-1)}{q^n - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(Eulersche Tilgungsformel[3]))

und

$$E = A \cdot q^n - a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

In beiden bedeutet A ein zu tilgendes Anfangskapital, das zu einem Zinsfuß von p vH aussteht und durch jährliche Zahlung von a Mark nach n Jahren bei der ersten Formel getilgt, bei der zweiten auf den Betrag von E Mark (Endkapital) herabgesunken ist. Zur Abkürzung ist der Zinsfaktor $1 + \frac{p}{100}$ mit q bezeichnet. Da die erste Formel der Sonderfall $E = 0$ der zweiten ist, so kann man natür-

[1]) J. Mounier, les Graphiques du Patron, Paris 1920, Gauthier-Villars; M. Kraïtchik, les Tables graphiques financiéres, Paris 1920, Gauthier-Villars.

[2]) Vergl. P. Luckey, diese Ztschr. 5 (1925), S. 254 bis 262 und S. 262 bis 267. Ferner: »Maschinenbau« 1926, Heft 1, S. 6 bis 11. Die in der Schlußanmerkung des ersten dieser Aufsätze genannte Arbeit von F. Eisner und W. Kretschmer haben die Verfasser, wie mir Hr. Eisner freundlichst mitteilt, vor Einblick in meinen Aufsatz abgefaßt.

[3]) Für diese Formel gaben schon d'Ocagne (Traité de Nom., 1. Aufl. S. 306, 2. Aufl. S. 128) und Mounier (a. a. O., Tafel 6) Nomogramme, die aber auf anderen Methoden beruhen als die obige Abbildung 1.

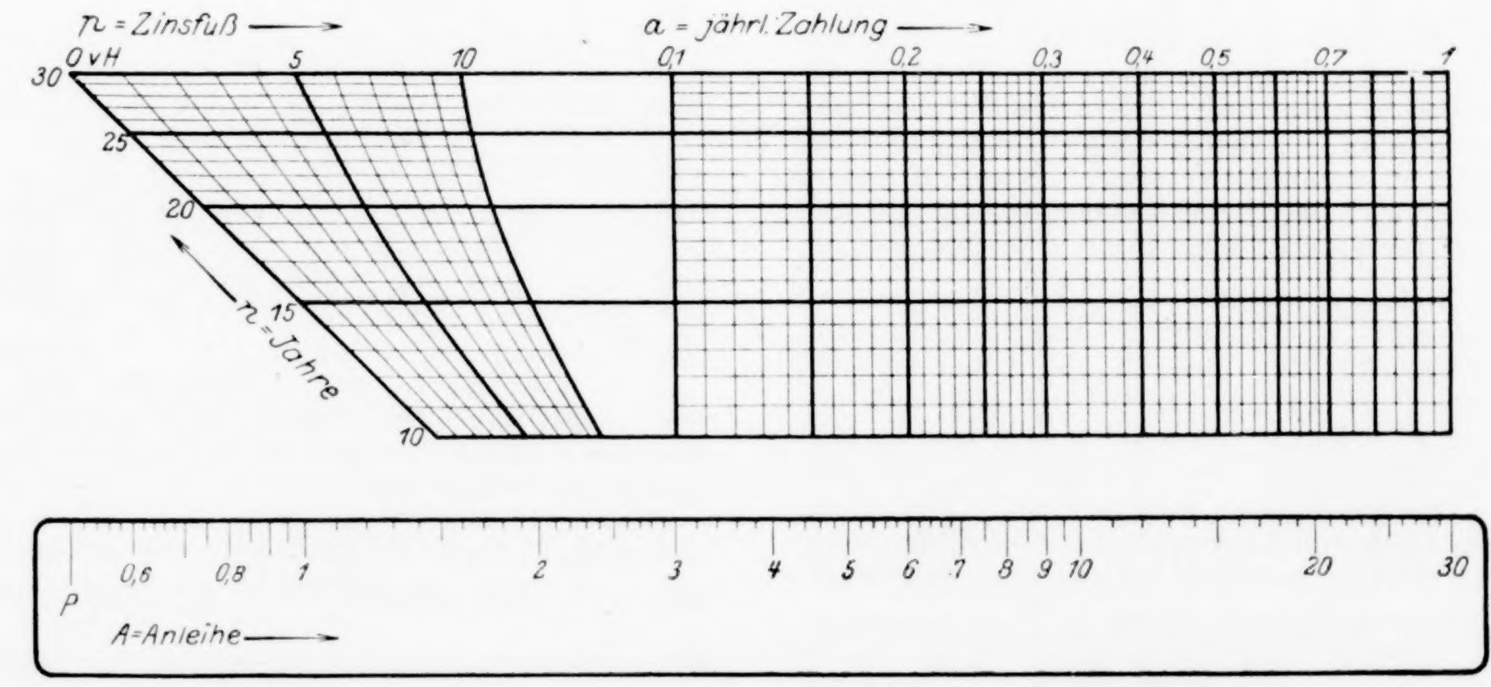


Abb. 1. $a = A\,\frac{q^n\,(q-1)}{q^n - 1}$.

Beispiel: $p = 5$, $n = 12$, $A = 80\,000$, $a = 9000$.

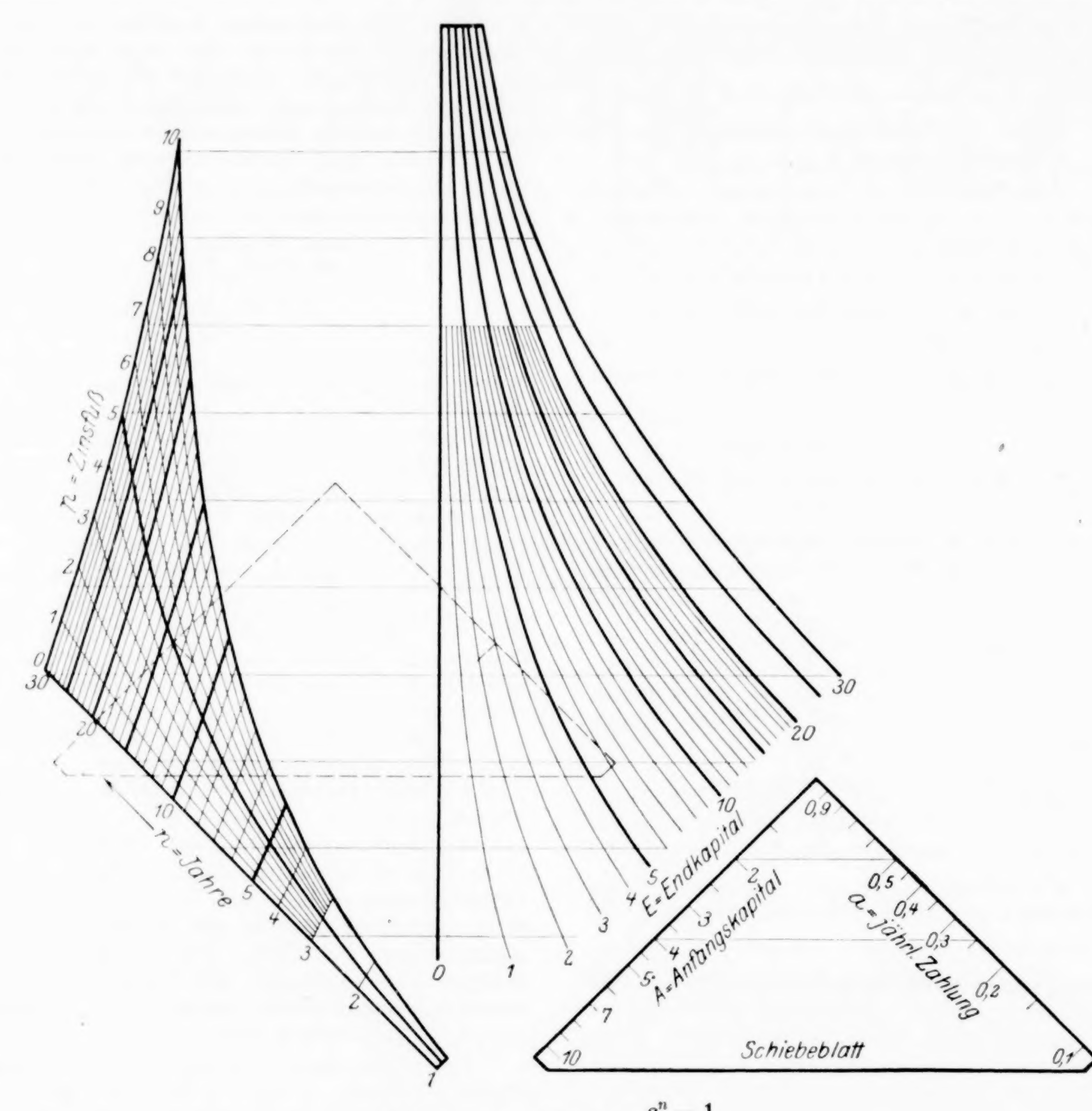


Abb. 2. $E = A \cdot q^n - a \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Beispiel: $p = 5$, $n = 14$, $A = 4000$, $a = 250$, $E = 3000$.

lich mit einer graphischen Tafel zur zweiten Formel auch Aufgaben zur ersten lösen. Doch ist für diese wichtige Formel ein besonderes Nomogramm vorzuziehen, da eine Tafel für eine Gleichung mit 4 Veränderlichen sich anders anlegen und bequemer handhaben läßt als eine solche für eine Gleichung mit 5 Veränderlichen.

1\. Welche Annuität tilgt bei 5 prozentiger Verzinsung in 12 Jahren eine Anleihe von 80000 Mark? Man stellt in Abb. 1 den Schiebestreifen so auf die Hauptfigur ein, daß der Punkt P auf den Netzpunkt $p = 5$, $n = 12$ fällt und der Träger der A-Leiter an der mit $n = 12$ bezifferten wagerechten Linie liegt. Dann fällt der Teilpunkt $A = 8$ auf die Linie $a = 0{,}9$. Die Annuität beträgt also 9000 Mark.

2\. Was bleibt von einem zu 5 vH ausstehenden Kapital von 4000 Mark übrig, wenn 14 Jahre lang am Schluß jedes Jahres 250 Mark abgehoben werden? Man legt in Abb. 2 das Schiebedreieck so auf die Hauptfigur, daß der mit $A = 4$ bezifferte Punkt auf den Netzpunkt $p = 5$, $n = 14$ fällt und die Hypotenuse parallel zu den wagerechten Richtlinien liegt. Dann fällt der Teilpunkt $a = 0{,}25$ auf die Linie $E = 3$. Es bleiben also 3000 M übrig.

Da keine der beiden Rechentafeln ein überzähliges System hat, kann jede der Veränderlichen als Unbekannte auftreten. Insbesondere sind also auch die Fälle lösbar, in denen der Zinsfuß p oder die Zahl der Jahre n gesucht ist.

Die Linienscharen und Leitern der Abb. 1 sind nach folgenden Gleichungen gezeichnet, die sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) beziehen:

Grundblatt:

$$\text{Netz } (p, n) \ldots x_{p,n} = \log \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}, \quad y_{p,n} = \log n \quad (3),$$

$$\text{Schar } (a) \ldots x_a = \log a + \log c \quad \ldots \quad (4).$$

Schiebestreifen:

$$\text{Leiter } (A) \ldots x_A = \log A + \log c \quad . \quad (5).$$

P ist der Punkt $x_A = 0$ dieser Leiter.

Die Ablesung vollzieht sich nach der Schiebergleichung

$$x_a - x_{p,n} = x_A \quad . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Setzt man die Abszissenwerte aus (3), (4) und (5) in (6) ein, so erhält man (1).

Die willkürliche Konstante c in (4) und (5) ist so zu wählen, daß die (a)-Schar das (p, n)-Netz nicht stört. In der Abbildung ist $n = 2$ gewählt worden. Statt $\log n$ kann in die zweite der Gleichungen (3) eine willkürliche andere Funktion von n eintreten, z. B. auch $y_{p,n} = n$. Die Funktion $\log n$ gibt aber dem Netz (p, n) für die kleineren Werte von n eine günstigere Form. Dieser Flächenschieber kann also auch als eindimensionaler Schieber mit einer verdichteten binären Leiter (p, n) ausgebildet werden. Eine senkrechte unbezifferte Parallelenschar könnte die Netzpunkte auf den Spalt zwischen Schieber und Zunge herunterholen, oder die Zunge könnte einen Ansatz mit einer senkrechten, durch P gehenden Schneide tragen, die auf den Netzpunkt (p, n) einzustellen wäre.

Die Herstellung des Schiebers erfordert keinerlei Rechenarbeit, wenn man doppelt logarithmisches Papier und fertige Tabellen für $x_{p,n}$ benutzt[1]).

Die Linienscharen und Leitern der Abb. 2 sind nach folgenden Gleichungen gezeichnet:

Grundblatt:

$$\text{Netz } (p, n) \ldots x_{p,n} = \log q^n, \; y_{p,n} = \log \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (7),$$

$$\text{Schar } (E) \ldots E = x_E - y_E \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Hier sind x_E und y_E die laufenden Koordinaten einer E-Kurve.

Schiebeblatt:

$$\text{Leiter } (A) \ldots x_A = -\log A, \; y_A = \log 1 \quad (9),$$

$$\text{Leiter } (a) \ldots x_a = \log 1, \; y_a = \log a \quad . \; (10).$$

Nach der Natur der Ablesevorschrift ist

$$x_E - x_{p,n} = x_a - x_A \quad . \; . \; . \; (11),$$

$$y_E - y_{p,n} = y_a - y_A \quad . \; . \; (12).$$

Man setze die 6 Werte (7), (9) und (10) in die Gleichungen (11) und (12) ein und löse die so erhaltenen Gleichungen nach x_E und y_E auf. Setzt man dann diese Werte in (8) ein, so erhält man die Gleichung (2).

Zur Herstellung der Tafel benutze man wieder logarithmisches Papier und fertige Zahlentabellen der Zinsfaktoren q^n und der Faktoren $\frac{q^n - 1}{q - 1}$. Dann kann man die Tafel ohne jede Rechnung punktweise zeichnen. Die in der Abb. 2 mit 0 bezifferte Zinsfußlinie des Netzes ist die mit 1 bezifferte Ordinatenachse des zugrunde gelegten logarithmischen Papiers.

Wie bei Abb. 1 können die beiden Teilfiguren des Grundblatts auch hier in beliebiger, z. B. wagerechter Richtung voneinander entfernt werden, wenn die beiden Leitern des Schiebeblatts um denselben Betrag und in derselben Richtung auseinandergerückt werden. So kann das Dreieck zu einem Trapez werden.

Marburg. P. Luckey. 529

[1]) In der kürzlich erschienenen zweiten Auflage des ersten Bändchens meiner kleinen »Einführung in die Nomographie« (Leipzig 1925, Math.-phys. Bibl. Bd. 28) ist dieser Schieber neben anderen ähnlicher Art ausführlicher behandelt.

Allgemeine graphische Lösung der kubischen Gleichungen. Im folgenden soll eine allgemeine graphische Methode für die Lösung der kubischen Gleichungen angegeben werden, welche gestattet, an Hand einer festen Figur alle Wurzeln aller kubischen Gleichungen zu erhalten.

§ 1. Gegeben sei folgende kubische Gleichung:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (A).$$

Wir reduzieren diese Gleichung, indem wir $x = y + h$ setzen. Dann ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{llll} y^3 + 3y^2 h & + 3 y h^2 & + h^3 \\ \quad + a y^2 & + 2 a y h & + a h^2 \\ & + b y & + b h \\ & & + c \end{array}\right\} = 0$$

$$y^3 + (3h + a) y^2 + (3h^2 + 2ah + b) y + (h^3 + ah^2 + bh + c) = 0$$

Soll diese Gleichung in die reduzierte Form

$$y^3 + p y + q = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

übergehen, so muß der Koeffizient von y^2 verschwinden, d. h. $3h + a = 0$ sein, daraus ergibt sich:

$$h = -\frac{a}{3}, \quad \text{d. h.} \quad x = y - \frac{a}{3} \quad . \; . \; (\alpha).$$

Der praktische Rechner reduziert mit dem Rechenschieber nach folgender, vom Hornerschen Schema her bekannten Anordnung:

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & & c \\ h & \nearrow & ah + h^2 & \nearrow & h^3 + ah^2 + bh \\ \hline (a + h) & \swarrow & (h^2 + ah + b) & \swarrow & (h^3 + ah^2 + bh + c) \\ & & & & = q \\ h & \nearrow & 2h + ah & & \\ \hline (a + 2h) & \swarrow & (3h^2 + 2ah + b) & & \\ & & = p. & & \\ h & & & & \\ \hline (a + 3h = 0) & & & & \end{array}$$

Ein numerisches Beispiel möge diese für das praktische Rechnen überaus einfache und sichere Methode vor Augen führen:

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0 \qquad x = y + \frac{5}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} -5 & -2 & +10 \\ \frac{5}{3} & -\frac{50}{9} & -\frac{340}{27} \\ \hline -\frac{10}{3} & -\frac{68}{9} & -\frac{70}{27} = q. \\ \frac{5}{3} & -\frac{25}{9} & \\ \hline -\frac{5}{3} & -\frac{93}{9} = p. & \end{array}$$

Die reduzierte Gleichung lautet also:

$$y^3 - \frac{93}{9} y - \frac{70}{27} = 0.$$

Man kann auch noch y durch $\frac{y^*}{3}$ ersetzen und erhält dadurch die (von Nennern freie) Gleichung:

$$(y^*)^3 - 93\,(y^*) - 70 = 0,$$

jetzt wird:

$$x = \frac{(y^*) + 5}{3}.$$

Die reduzierte Gleichung (B) transformieren wir abermals durch die Substitution

$$y = \sqrt[3]{q} \cdot z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Dadurch erhalten wir:

$$q\,z^3 + p\,\sqrt[3]{q} \cdot z + q = 0;$$

setzen wir $q \neq 0$ voraus (für $q = 0$ würde die kubische Gleichung (B) in $y\,(y^2 + p) = 0$ zerfallen!), so können wir durch q dividieren und erhalten:

$$z^3 + \frac{p}{q}\sqrt[3]{q} \cdot z + 1 = 0.$$

Setzen wir schließlich

$$\frac{p}{q}\sqrt[3]{q} = -\lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma),$$

so ergibt sich:

$$z^3 - \lambda z + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

oder

$$z^2 + \frac{1}{z} = \lambda$$

als Endresultat unserer Umformung.

§ 2. Wir untersuchen nun die Funktion

$$\varphi = z^2 + \frac{1}{z}.$$

Diese Funktion setzt sich aus der Parabel

$$\varphi_1 = z^2$$

und der gleichseitigen Hyperbel

$$\varphi_2 = \frac{1}{z}$$

zusammen und kann durch graphische Addition beider Funktionen gezeichnet werden. Die Funktion

$$\varphi = z^2 + \frac{1}{z} = \frac{z^3 + 1}{z}$$

hat für $z_p = 0$ einen Pol und für $z_0 = -1$ eine Nullstelle; ihre asymptotischen Kurven sind $\varphi = z^2$ und $\varphi = \frac{1}{z}$. An der Stelle

$$z_m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}79$$

hat sie ein Minimum mit dem Werte

$$\varphi_m = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 \approx 1{,}89.$$

Das graphische Bild dieser Verhältnisse gibt Abb. 1 wieder.

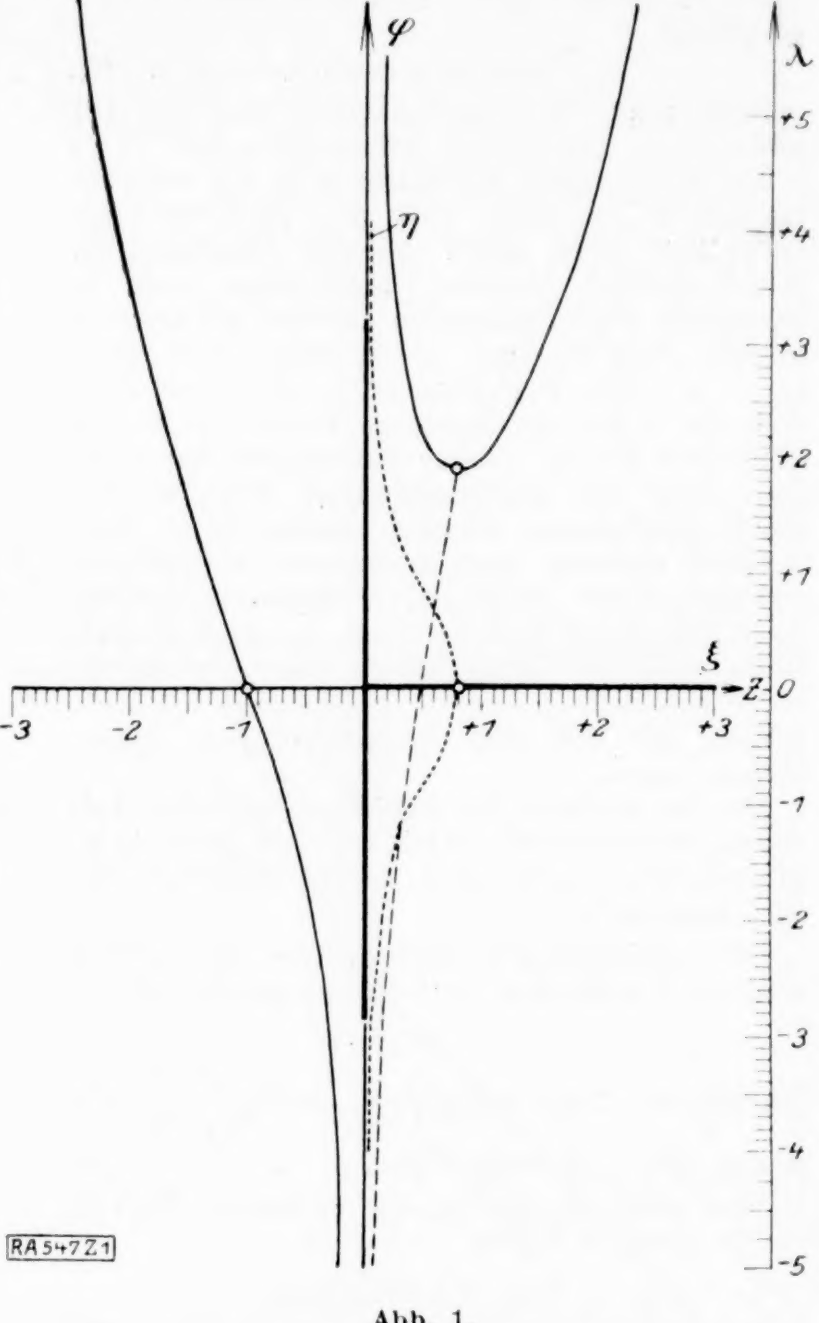


Abb. 1.

§ 3. Die Lösung einer kubischen Gleichung ist an Hand der Abb. 1 sehr einfach. Die vorgelegte kubische Gleichung wird von der Form (A) auf die Form (B) nach der oben angegebenen Methode reduziert. Aus p und q wird jetzt der Wert von λ nach (γ) (wiederum mit Hilfe des Rechenschiebers) berechnet. Zur z-Achse ziehen wir eine Parallele, deren Abstand durch den absoluten Wert von λ gegeben ist und deren Lage sich nach dem Vorzeichen von λ richtet (oberhalb der z-Achse, wenn $\lambda > 0$, unterhalb dieser, wenn $\lambda < 0$ ist). Die Wurzeln der kubischen Gleichung (C) sind nun die Abszissen der Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Kurve $\varphi = z^2 + \frac{1}{z}$.

Diese Methode hat vom graphischen Standpunkte aus den Vorteil, daß als schneidende Gerade eine Horizontale in Frage kommt, die gute Schnitte liefert und bei Anwendung von mm-Papier nicht erst gezeichnet zu werden braucht. Vor der allgemeinen Lösungsmethode (Cardano) hat sie den Vorteil, daß durch die Ermittlung von λ, welches hier die Rolle der Diskriminante spielt, auch schon die Lösung gefunden ist. Schließlich ist unsere Methode allgemein gültig und liefert, wie wir noch sehen werden, alle Wurzeln (auch die komplexen). Sind die Wurzeln $z_{1,2,3}$ gefunden, so ergeben sich nach (β) die entsprechenden Werte $y_{1,2,3}$ der reduzierten Gleichung (B) und nach

(α) die Wurzeln $x_{1,2,3}$ der eigentlichen Gleichung (A).

§ 4. Die Figur zeigt deutlich, daß für negative Werte von λ nur **eine reelle** Lösung existiert, daß für positive Werte von λ, die $< \varphi_m$ sind, auch nur eine reelle Lösung sich ergibt, daß für $\lambda > \varphi_m$ drei reelle Wurzeln auftreten, die für $\lambda = \varphi_m$ in die Doppelwurzel

$z_d = z_m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **und die reelle** $-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **übergehen.**

Der Wert von $\lambda = \varphi \approx 1{,}89$ teilt die Ebene in zwei Teile: oberhalb dieser Trennungslinie haben wir drei reelle, unterhalb nur eine reelle Wurzel. Von unserer Trennungslinie aus betrachtet, gehört die obere Halbebene dem casus irreducibilis, die untere dem casus reducibilis an. Nach der allgemeinen Theorie ist die Diskriminante

$$D = -4 \cdot 27\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right),$$

also im Spezialfalle der Gleichung (C), wo $q = 1$ und $p = -\lambda$ ist.

$$D = -27 + 4\lambda^3.$$

Ist $D = 0$, so wird $\lambda = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \varphi_m$ [1] also in Uebereinstimmung mit dem, was eben über die Trennungslinie $\lambda = \varphi_m$ ausgesagt werde.

Mit der Lösung des C. i. hängt λ folgendermaßen zusammen: Es ist $\cos 3\varphi = -\frac{q_2}{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2}}$ d. h. $(\cos 3\varphi)^2 = \frac{27}{4\lambda^3}$. Der Grenzfall tritt ein, wenn $\cos 3\varphi = 1$ wird, d. h. $\lambda^3 = \frac{27}{4}$ oder $\lambda = \varphi_m$ ist.

§ 5. Satz: Die kubische Gleichung (C) hat, wie das graphische Bild zeigt, **stets eine reelle, negative Lösung**. Im allgemeinen haben wir folgende Uebersicht:

p	q	λ	Wurzeln		
			neg.	pos.	komplex.
>0 <0	>0 <0	<0	1	0	2
>0	<0	>0			
		a) $<1{,}89$	1	0	2
<0	>0	b) $>1{,}89$	1	2	0
		c) $=1{,}89$	1	1 Doppelw.	0

§ 6. Die komplexen Wurzeln.

Auch die komplexen Wurzeln lassen sich graphisch ermitteln. Wir gehen von der kubischen Gleichung (C) aus:

$$z^3 - \lambda z + 1 = 0.$$

[1]) Aus $\lambda = -\frac{p}{q}\sqrt[3]{q} = \varphi_m = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2$ folgt:

$$\lambda^3 = -\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Wenn z_1, z_2, z_3 ihre Wurzeln, und zwar z_1 die reelle, $z_{2,3}$ die komplexen sind, so wollen wir setzen:

$$z_2 = \xi + \eta \cdot i$$
$$z_3 = \xi - \eta \cdot i.$$

Da in der Gleichung (C) das Glied mit z^2 fehlt und das absolute Glied $= 1$ ist, so haben wir für $z_{2,3}$ die Bestimmungsgleichungen:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -1 \quad \ldots\ldots (2).$$

Aus (2) folgt:

$$z_2 \cdot z_3 = -\frac{1}{z_1},$$

d. h.

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\sqrt{-\frac{1}{z_1}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (3).$$

Aus (1) ergibt sich:

$$2\xi = -z_1, \quad \text{d. h.} \quad \xi = -\frac{z_1}{2} \quad \ldots (4).$$

Aus (3) und (4) folgt endlich:

$$\eta = \pm\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{2\xi}}\right)^2 - \xi^2} \quad \ldots\ldots (5).$$

Da allgemein immer eine reelle negative Lösung auftritt, so muß im Falle des C. r. z_1 negativ sein, d. h. $\xi = -\frac{z_1}{2}$ ist **stets positiv!** Wir haben also den reellen Teil ξ der komplexen Lösung nach (4) ermittelt, er ist **stets positiv und gleich der Hälfte des absoluten Wertes der reellen Lösung** z_1! Den noch fehlenden imaginären Teil η ermitteln wir nach (5) als Kathete (Abb. 2) eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse $\sqrt{\frac{1}{2\xi}}$ ist und dessen andere Kathete den Wert $\xi = -\frac{z_1}{2}$ hat. Vom graphischen Standpunkt aus ist diese Ermittlung sehr einfach; $\frac{1}{z_1}$ ist die Ordinate der gleichseitigen Hyperbel $\varphi = \frac{1}{z}$ für den Punkt $+|z_1|$; gehen wir jetzt von diesem Punkte aus parallel zu z-Achse an die Parabel $\varphi = z^2$, so muß die zugehörige Abszisse $\sqrt{+\frac{1}{|z_1|}}$ sein. Mit diesem Werte als Radius schlagen wir um den Nullpunkt einen Kreis (bei dem für uns nur die rechte Hälfte in Betracht kommt) und errichten im Punkte $-\frac{z_1}{2}$ die Senkrechte zur z-Achse; ihre Schnittpunkte mit dem Halbkreise stellen dann die Punkte $\xi + \eta i$ dar, wenn wir die Zeichenebene nun als Ebene der komplexen Zahlen auffassen; der Radius $v = \left|\sqrt{-\frac{1}{z_1}}\right|$ ist zugleich der absolute Betrag von $\xi + \eta i$. Aus dieser Konstruktion (Abb. 2) sieht man folgendes:

a) **Der Nullpunkt ist der Schwerpunkt des Wurzeldreiecks.** Da z_2 und z_3

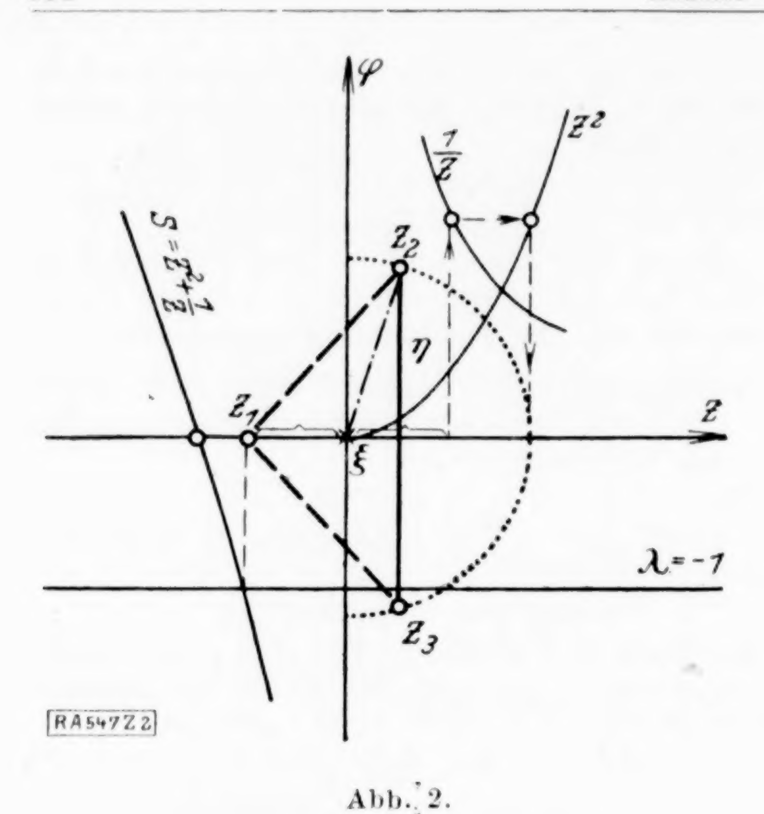


Abb. 2.

spiegelbildlich zur z-Achse liegen, ist das Dreieck $z_1\, z_2\, z_3$ gleichschenklig, also muß der Schwerpunkt auf der Höhe zur Basis liegen. Die Höhe wird aber durch den Nullpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt, da $2\,\xi = -z_1$ ist!

§ 7. Wir hatten schon im § 4 λ als Diskriminante erkannt. Wir wollen nun die Bedeutung von λ in den beiden bekanntesten graphischen Methoden zur Lösung kubischer Gleichungen untersuchen.

a) Stellt man die Kurve $y = x^3 - \lambda x + 1$ graphisch dar, so ergibt sich, da

$$y' = 3\,x^2 - \lambda\,, \quad y'' = 6\,x\,, \quad y''' = 6\,x\,,$$

ist, folgendes: Die Kurve hat für $x_m = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ ihre Extrema und für $x_w = 0$ einen Wendepunkt. Der Richtungswinkel α der Wendetangente ist bestimmt durch $\operatorname{tg}\alpha = -\lambda$. Ist $\lambda < 0$, so treten keine Extrema auf, die Kurve hat mit der x-Achse nur einen Schnittpunkt, d. h. es existiert nur eine reelle Lösung; ist dagegen $\lambda > 0$, so gibt es Extrema. Die Kurve berührt die x-Achse wenn

$$y_m = 2\sqrt{\frac{|\lambda|^3}{27}} + 1 = 0$$

ist, d. h.

$$\lambda = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

b) Bringt man die kubische Parabel x^3 mit dem Geradenbüschel $\lambda \cdot x - 1$ (bei veränderlichem λ; Scheitel $0;\ -1$) zum Schnitt, so sieht man, daß die Geraden in zwei Gruppen zerfallen, die der ersten Gruppe schneiden die Parabel einmal, die der zweiten dreimal. Geschieden werden beide Gruppen durch die Tangente, deren Richtungskonstante $3\,x_b^2 = \lambda$ sein muß, d. h. $x_b = \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$. Für diesen Fall ist

$$y = \lambda\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right) - 1 = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)^3 \quad \text{d. h.}\quad \lambda = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Für unsere Methode hat λ eine weitaus größere Bedeutung. Satz: λ ist eine Invariante gegenüber der Transformation $y = m \cdot z$. Nach der Gleichung (B) ist

$$y^3 + p\,y + q = 0$$

$y = m \cdot z$ eingesetzt ergibt

$$m^3 z^3 + p\,m\,z + q = 0$$

oder

$$z^3 + \left(\frac{p}{m^2}\right) z + \left(\frac{q}{m^3}\right) = 0.$$

Für diese Gleichung ist

$$\lambda^* = -\frac{\frac{p}{m^2}}{\frac{q}{m^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{m^3}} = -\frac{p}{q}\sqrt[3]{q} = \lambda.$$

Transformieren wir also die Gleichung (B) in der Weise, daß wir $y = m \cdot z$ setzen, so bleibt dabei λ ungeändert; das bedeutet aber: wenn wir die Wurzeln y der Gleichung (B) alle im Verhältnis $m:1$ vergrößern oder verkleinern, so hat das auf λ keinen Einfluß. Unsere graphische Darstellung ist den anderen graphischen Methoden zur Lösung kubischer Gleichungen nun insofern überlegen, als Gleichungen mit sehr großen oder sehr kleinen Wurzeln der graphischen Behandlung in gleicher Weise ohne weiteres zugänglich sind. Während die gewöhnlichen Methoden in diesen Fällen zu einer Aenderung des Maßstabes oder der Wurzeln ihre Zuflucht nehmen müssen, ist das hier infolge der invarianten Eigenschaften von λ nicht notwendig. Wir können über λ noch folgendes aussagen: Es ist $\lambda = -\frac{p}{q}\sqrt[3]{q}$, und da

$$p = y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3 + y_2 \cdot y_3,$$
$$q = -\,y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$$

ist,, so wird

$$\lambda = -\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right) \cdot \sqrt[3]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}.$$

Da λ gegenüber der Transformation $\lambda = \sqrt[3]{q}$ invariant ist, so muß ohne weiteres auch

$$\lambda = -\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)\sqrt[3]{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}$$

sein, d. h. $z_1 \cdot z \cdot z_3 = -1$ ist,

$$\lambda = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}.$$

Dadurch ist der Zusammenhang zwischen λ und den Wurzeln der Gleichung hergestellt. Dieses Resultat können wir auch aus der Gleichung (C) gewinnen, wenn wir $z = \frac{1}{u}$ setzen, dann ergibt sich:

$$\frac{1}{u^2} + u = \lambda \quad \text{oder:}\quad u^3 - \lambda\,u^2 + 1 = 0,$$

$$\text{d. h.}\quad u_1 + u_2 + u_3 = \lambda$$

$$\text{oder:}\quad \lambda = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}.$$

§ 8. Wir hatten bereits gesehen, daß drei große bzw. drei kleine Wurzeln die Größe von λ nicht beeinflussen. Wenn aber die Wur-

zeln ihrem absoluten Werte nach sehr verschieden sind, so kann dadurch λ für die Zeichnung ungünstig ausfallen. In diesen Fällen können wir die Kurve $\varphi = z^2 + \frac{1}{z}$ durch ihre Asymptoten ersetzen, und zwar:

$$\text{a)}\quad \lambda \gg 0;\quad z_1 \approx -\frac{1}{\lambda};\quad z_{2,3} \approx \pm \sqrt{\lambda}.$$

$$\text{b)}\quad \lambda \ll 0;\quad z_1 \approx -\frac{1}{|\lambda|};\quad z_{2,3} = \xi + \eta i,$$

$$\text{wobei}\quad \xi \approx \frac{1}{2|\lambda|},\quad \eta \approx + \sqrt{|\lambda|}\quad \text{ist.}$$

Eine einfache Abschätzung zeigt auch, wie weit die Zeichnung bei vorgeschriebener Genauigkeit auszuführen ist. Nehmen wir für z eine Genauigkeit von einer Einheit der ersten Dezimale an, so sei $z_a - z_k = \frac{1}{10}$ wenn z_a den durch die Asymptote, z_k den durch die Kurve erhaltenen Wert bedeutet, also ist $z_a = z_k + \frac{1}{10}$. Bei parabolischer Annäherung wird, da nun $\lambda = z_k^2 + \frac{1}{z_k} = z_a^2$ ist,

$$z_k^2 + \frac{1}{z_k} = z_k^2 + 2\, z_k \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$$

oder

$$z_k^2 + \frac{1}{20} z_k - 5 = 0 \qquad \text{Also}\ z_{k1,2} \approx \sqrt{5}.$$

Aus $\lambda = z_k^2 + \frac{1}{z_k}$ folgt, daß $\lambda \leq 5$ ausreicht.

Eine ähnliche Rechnung zeigt, daß bei hyperbolischer Annäherung λ noch kleiner sein kann, wenn wieder die Genauigkeit von einer Dezimale verlangt wird. Man kommt also in allen Fällen mit einer handlichen Zeichnung aus, bei der in Richtung der Ordinatenachse der Höchstwert von $\lambda = 5$ für die Genauigkeit einer Dezimale genügt.

§ 9. Sonderfälle:

a) Ist $\lambda = 0$, dann geht die Gleichung (C) über in $z^3 + 1 = 0$ und wir erhalten die dritten Einheitswurzeln:

$$-1;\quad \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

b) Ist $p = 0$, dann ist $\lambda = 0$ (Fall a) und aus der Gleichung (B) folgt

$$y^3 = -q,\quad \text{d. h.}\quad y = -\sqrt[3]{q} \cdot \sqrt[3]{-1}$$

also in Uebereinstimmung mit dem Fall a.

c) Ist $q = 0$, dann ist λ unbestimmt (wir hatten ja q verschieden von 0 vorausgesetzt). Aus der Gleichung (B) folgt dann:

$$y^3 + p\,y = 0;\quad y\,(y^2 + p) = 0;$$

$$y_1 = 0;\quad y_{2,3} = \pm\sqrt{-p}.$$

d) Für sehr große positive oder negative Werte von λ (vergl. § 8), nähert sich z den Werten 0 und $\pm\infty$.

Zusammenfassung: λ kann jeden reellen Wert zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen!

§ 10. Für die Praxis wollen wir ein Rechenblatt herstellen, das alle Wurzeln aller kubischen Gleichungen mühelos zu ermitteln gestattet. Die Wurzeln der kubischen Gleichung (C) gruppieren sich folgendermaßen:

1. Es tritt stets eine negative reelle Wurzel auf, die zwischen 0 und $-\sqrt{|\lambda|}$ liegt.

2. Der Grenzfall tritt ein, wenn $\lambda = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2$ ist, im Falle des C. i. weist er den positiven Wurzeln zwei Gebiete zu.

$$\text{a)}\quad \text{von 0 bis}\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\text{b)}\quad \text{von}\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\ \text{bis}\ + \sqrt{|\lambda|}.$$

3. Denken wir uns für den Fall des C. r. die rechte Halbebene von der Ordinatenachse aus gerechnet als Ebene der komplexen Zahlen, also doppelt belegt, d. h. die φ-Achse zugleich als η-Achse und die positive z-Achse zugleich als ξ-Achse, so liegen die komplexen Wurzeln in dem Parallelstreifen, der von der η-Achse und der Parallelen zu ihr durch den Grenzpunkt gebildet wird. Es ist ξ immer positiv und $0 \leq \xi \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, während η alle Werte von 0 bis $\pm\infty$ annehmen kann.

Für die praktische Rechnung vervollständigen wir die Abb. 1, indem wir die Kurve $\xi = f(\lambda)$, die im Grenzpunkt ansetzt und von der Ordinatenachse halb so weit entfernt ist, wie der negative Zweig der Kurve $\varphi = z^2 + \frac{1}{z}$; schließlich zeichnen wir noch die Kurve $\eta = \pm\sqrt{\frac{1}{2\,\xi} - \xi^2}$, die symmetrisch zur ξ-Achse verläuft, sich der η-Achse also symptotisch nähert und im Punkte $\xi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (Grenzpunkt) eine vertikale Tangente besitzt. Jetzt ist das Nomogramm vollständig. Für irgendeinen Wert von $\lambda < 1{,}89$ finden wir den reellen Teil der komplexen Wurzeln als Abszisse des Schnittpunktes mit der Kurve $\xi = f(\lambda)$, die imaginären Teile als Ordinaten für diesen Punkt bis zur Kurve $\eta = \sqrt{\frac{1}{2\,\xi} - \xi^2}$.

Es folgen nun zwei durchgerechnete Beispiele.

$$x^3 + 6\,x^2 - 4\,x + 5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\begin{array}{rrr}
+6 & -4 & +5 \\
-2 & -8 & +24 \\
\hline
+4 & -12 & \underline{\underline{+29 = q}} \\
-2 & -4 & \\
\hline
 & \underline{\underline{-16 = p.}} &
\end{array}$$

$$y^3 - 16\,y + 29 = 0$$

$$\lambda = -\frac{-16}{29}\sqrt[3]{29} \approx +1{,}69\ \text{(also C. r.)}$$

$$z_1 \approx -1{,}55,\qquad z_{2,3} \approx 0{,}78 \pm 0{,}3\,i$$

$$y_1 \approx -4{,}78,\qquad y_{2,3} \approx 2{,}4 \pm 0{,}92\,i.$$

(Die genauen Werte sind:

$$-4{,}7075; \quad 2{,}354 \pm 0{,}788\, i)$$

$$x_1 \approx -6{,}78 \quad (\text{genau: } -6{,}707)$$

$$x_{2,3} \approx 0{,}4 \pm 0{,}92\, i \quad (\text{genau: } 0{,}354 \pm 0{,}786\, i).$$

Das zweite Beispiel zeigt die Approximation durch die Asymptoten.

$$x^3 - 5\, x^2 - 2\, x + 10 = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (2).$$

Nach § 1 ist die reduzierte Gleichung:

$$y^3 - 93\, y - 70 = 0$$

$$\lambda = \frac{93}{70} \sqrt[3]{70} \approx 5{,}48 \ (\text{C. i.})$$

$$z_1 \approx -\frac{1}{|\lambda|} \approx -0{,}182, \quad z_{2,3} \approx \pm \sqrt{|\lambda|} \approx \pm 2{,}34$$

$$\begin{array}{ll} y_1 \approx -0{,}752 & \\ y_2 \approx +9{,}65 & \text{genau} \\ y_3 \approx -9{,}65 & \end{array} \left\{ \begin{array}{r} -0{,}7574 \\ +10{,}000 \\ -9{,}242 \end{array} \right.$$

Die Lösung $y_{2,3} \approx \pm \sqrt{|\lambda|}$ liegt ungefähr in der Mitte!

Die Wurzeln der eigentlichen Gleichung sind:

$$x_1 \approx 1{,}416 \ (1{,}414)$$

$$x_2 \approx +4{,}88 \ (+5{,}000)$$

$$x_3 \approx -1{,}55 \ (-1{,}414).$$

Aus diesen Beispielen sieht man, wie einfach die Lösung mit Hilfe des Nomogramms wird; die Genauigkeit ist für eine Ueberschlagsrechnung recht befriedigend, sie kann leicht nach den bekannten Methoden der Algebra gesteigert werden.

Vom Standpunkte der reinen Mathematik gibt die Methode, die eine praktische Anwendung der Untersuchung einer rationalen Funktion darstellt, ein umfassendes Bild für die Theorie der Lösungen, indem hier graphisch das Charakteristische deutlich hervortritt. Die Wurzeln erscheinen nach Vorzeichen, Größe und Gebieten getrennt. Der Uebergang des C. r. zum C. i. ist durch einen festen Zahlenwert für $\lambda = 1{,}89$ gegeben. Der praktische Mathematiker hat in dem Rechenblatt ein einfaches Hilfsmittel, mühelos für jede vorgelegte kubische Gleichung alle Wurzeln zu ermitteln.

Berlin-Tempelhof. W. Zabel. 547

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin SW 19, Beuthstr. 7, zu beziehen.)

E. **HEINRICH** und R. **STÜCKLE**, Wärmeübergang von Oel an Wasser in einfachen Rohrleitungen und Kühlapparaten. Druckabfall in Kühlapparaten. Mit 67 Abb. und 16 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 271. VdI-Verlag G. m. b. H., 1925, Berlin. 60 S.

Bei Dampfturbinen und Verbrennungskraftmaschinen wird Oel als Kühlflüssigkeit und zur Umlaufschmierung verwendet, bedarf also der Kühlung durch Wasser. Bisher war man hierbei jedoch über die Wärmeübergangszahlen im Unklaren. Daher war es verdienstlich, dieselben in verschiedenen Fällen zu bestimmen, was im Ingenieurlaboratorium der technischen Hochschule Stuttgart in sehr ausführlicher und umfassender Weise geschehen ist.

Zur Untersuchung gelangte vorerst das Element, ein einfaches gerades Messingrohr von 8,2 m Länge, in dem Kühlwasser strömte und das von einem ölführenden Rohre umgeben war, dann aber 4 fertige Kühler verschiedener Bauart. Erwünscht wäre gewesen, auch den allerdings schwerer durchzuführenden Versuch reiner Querströmung vorzunehmen, da sich die Strömung in den Kühlern aus Längs- und Querströmung zusammensetzt.

Die Versuchseinrichtungen werden genau beschrieben, die möglichen Veränderungen der Wasser- und Oelgeschwindigkeit und der Oeltemperatur dargestellt, ebenso die Aenderung der Lage der Kühlflächen und der Anordnung der Kühlwasserführung.

In den Versuchsergebnissen werden das spezifische Gewicht und die Zähigkeit des Oels sowie der Luftgehalt und die Härte des Wassers in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur untersucht und insbesondere auch die Luftabscheidung aus dem Kühlwasser festgestellt. Alle Versuche sind bei verschiedenen Wassergeschwindigkeiten, mittleren Oeltemperaturen und Oelgeschwindigkeiten durchgeführt und in Tafeln und Schaubildern dargestellt, auch bei stehender und liegender Lage der Kühlrohre sind Vergleichsversuche vorgenommen worden.

Die Zusammenstellung der Ergebnisse zeigt recht verschiedene Werte des Wärmeüberganges, bei Veränderung der Wassergeschwindigkeit stellt sich auch der Verlauf der Diagrammlinien sehr verschieden dar, so daß allgemein gültige Angaben nicht gemacht werden können. Immerhin ergibt sich, daß die Durchmischung des Oels bei Querströmung den Wärmedurchgang stark erhöht und daß dann der Uebergangsbeiwert der 0,3. Potenz der Oelgeschwindigkeit proportional ist. Zunehmende mittlere Oeltemperatur erhöht den Wärmeübergang. Im allgemeinen kann der Beiwert

$$k = C\, w_0^m\, w_w^n\, t^q$$

gesetzt werden, (w_0 = Oelgeschwindigkeit, w_w = Wassergeschwindigkeit, t = mittlere Oeltemperatur) die Exponenten von w_w und w_0 sind etwa 1,7 und 1,5, im übrigen muß man die Versuchsergebnisse unmittelbar heranziehen.

Prag. K. Körner. 615

Dr. RUDOLF **FUETER**, o. Professor an der Universität Zürich. Synthetische Zahlentheorie. Zweite verbesserte Auflage. Göschens Lehrbücherei. I. Gruppe: Reine Mathematik, Bd. 4. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1925. VIII + 277 S. Preis geh. 10 M, geb. 12 M.

Das Buch gibt einen systematischen Aufbau der Zahlentheorie, der die sonst übliche Unterscheidung in niedere und höhere Zahlentheorie vermeidet. Ueber den Wert und die Bedeutung dieses Werkes, das einem der schwierigsten Gebiete der reinen Mathematik angehört, zu urteilen, ist hier nicht der Ort und liegt dem Referenten auch durchaus fern. Es sei jedoch eine Bemerkung gestattet, die sich auf den einzigen Punkt bezieht, in dem die Ausführungen des Buches ein Anwendungsgebiet berühren, wenn auch dieser Punkt ein im Rahmen des Ganzen unbedeutender ist.

An zwei Stellen kommt der Verf. kurz auf die bekannte biologische Theorie von Wilhelm Fließ zu sprechen und erklärt die Fließsche Behauptung, alle für das menschliche Leben biologisch wichtigen Zeitabstände ließen sich (in Tagen gemessen) als Vielfache der Periodenzahlen 23 und 28 in einfacher Weise darstellen, für »unbefriedigend«. Dieses Urteil stützt sich auf den bekannten Satz der Zahlentheorie, daß durch zwei teilerfremde Zahlen wie 23 und 28 jede ganze Zahl darstellbar ist. Nun sagt Fließ aber gleich zu Beginn seines Buches »Der Ablauf des Lebens« (1906) folgendes: »Der mathematisch gebildete Leser wolle den wohlfeilen Einwand, daß man jede Zahl als Summe oder Differenz von 23 und 28 darstellen könne, sich ersparen, bis ihn der Verlauf der Darstellung über den Bau der Koeffizienten unterrichtet hat.« In der Tat ist das ganze umfangreiche Buch von Fließ dem Versuch gewidmet, nachzuweisen, daß bei der Darstellung der biologischen Daten auf der Basis 23, 28 die Koeffizienten einen systematischen Bau besitzen. Ob der Versuch gelungen ist und was die ganze Frage für die Biologie bedeutet, muß hier unentschieden bleiben. An sich ist die Behauptung von Fließ durchaus sinnvoll und man muß wohl die Art der Beurteilung von seiten des Zahlentheoretikers als »unbefriedigend« bezeichnen.

Der Wert des Fueterschen Werkes wird, wie schon hervorgehoben, durch diese geringfügige Einzelheit gewiß nicht berührt. Andererseits ist es eine typische Erscheinung, daß gerade die scharfsinnigsten und kritischesten Mathematiker, sobald sie sich einem Anwendungsgebiet nähern, ihre Aufmerksamkeit und Kritik in allzu hohem Maße vermindern.

Mises. 634

HANS **HAHN,** ord. Professor an der Universität Wien, und HEINRICH **TIETZE,** ord. Professor an der Universität München. Einführung in die Elemente der höheren Mathematik. Mit 83 Fig. im Text. Verlag von S. Hirzel, Leipzig 1925. XII + 330 S. Preis geh. 18 M, geb. 20 M.

Dieses Lehrbuch der Elemente der Differential- und Integralrechnung nimmt eine ganz eigenartige Stellung innerhalb der so zahlreichen Lehrbücher dieses Gebietes ein. Trotz des verhältnismäßig großen Umfanges kommt es in seinen Ergebnissen nicht über die einfachsten Anfangsgründe hinaus. Nur im letzten kurzen Kapitel werden ein paar Worte über Differentialgleichungen erster Ordnung gesagt, worauf noch ein kurzer Anhang einiges über Funktionen mehrerer Veränderlicher bringt. Das Ziel, das die Verf. sich gestellt haben, liegt eben in einer ganz anderen Richtung als der, die etwa eine normale Hochschulvorlesung über Differential- und Integralrechnung verfolgt. Sie wollten für Leser, die lediglich über normale Schulbildung (die Anfangsgründe der Buchstabenrechnung) verfügen, eine den heutigen kritischen Anforderungen entsprechende, völlig korrekte Einführung in die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung geben. Demgemäß ist etwa die Hälfte des Buches einer Auseinandersetzung über den Zahlbegriff und den Funktionsbegriff gewidmet. Erst auf S. 155 erfährt der Leser zum ersten Male etwas vom Differentialquotienten. Das Wesentliche in dem Buche ist natürlich die Art der Darstellung im einzelnen. Ohne Zweifel ist es den Verf., die viel Zeit und Mühe auf die Durchführung der selbstgestellten Aufgabe verwandt haben, gelungen, den schwierigen und für eine popularisierende Darstellung sehr spröden Stoff, soweit dies überhaupt möglich ist, dem allgemeinen Verständnis zugänglich zu machen. Man kann das Buch jedem empfehlen, der Interesse dafür hat, zu erfahren, in welcher Richtung die mathematische Forschung des letzten halben Jahrhunderts die Grundbegriffe verschärft und verfeinert hat. Manchem, der die Differential- und Integralrechnung in der üblichen Form kennen gelernt hat, werden Zweifel oder Skrupel in dem einen oder anderen Punkt gekommen sein. Er wird in dem vorliegenden Buch, das keinerlei Forderungen an Vorkenntnisse oder an besondere mathematische Befähigung stellt, alles finden, was geeignet ist, ihn von jeder Unsicherheit zu befreien.

Mises. 635

J. W. N. **SULLIVAN,** The History of Mathematics in Europe from the Fall of Greek Science to the Rise of the conception of Mathematical Rigour Chapters in the History of Science. IV. General Editor Charles Singer. Oxford University Press Humphrey Milford 1925. 109 S.

Das kleine, hübsch ausgestattete Büchlein gibt einen Ueberblick über die Entwicklung der Mathematik in ihren Hauptpunkten bis einschließlich Newton. In einem kurzen Anhang werden dann noch ein paar Worte über die späteren Fortschritte, bis etwa zur Zeit der französischen Revolution, hinzugefügt. Wie das der in England natürlichen Auffassung entspricht, ist keinerlei Trennung zwischen reiner und angewandter Mathematik in der Darstellung zu bemerken. Besonders hervorzuheben sind die schönen Bildnisse von Mathematikern, die das Buch schmücken.

Mises. 636

HUGO **AHLBERG**, Festigkeitslehre in elementarer Darstellung mit zahlreichen, der Praxis entnommenen Beispielen. Zum Gebrauch für Lehrer und Studierende an technischen Mittelschulen sowie für die Praxis. Schste verbesserte Auflage. Verlag Dr. Max Jänecke, Leipzig 1925. 148 S. Preis 3,05 M.

Der Inhalt ist durch den Titel gekennzeichnet, es handelt sich um ein elementares Lehrbuch für technische Mittelschulen, das ganz auf den üblichen Grundlagen aufgebaut ist; für den Kreis, für den es bestimmt ist, leistet es sicher gute Dienste. Auch die elementaren Werke sollten sich den jeweils als vorteilhaft erkannten und allseits eingeführten Begriffsbildungen anschließen. So wäre es z. B. empfehlenswert, den Begriff der Streckgrenze, der jetzt in dem Buche gar nicht vorkommt, seiner Bedeutung gemäß zur Geltung zu bringen.

Prag. T. Pöschl. 628

Dr. IWAN **DŐRY**, Direktor der Pöge-Elektrizitäts-A.-G., Chemnitz. Die Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb. Mit 12 Abb. Sammlung Vieweg. Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik. Heft 68. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1923. 38 S.

Die Schüttelschwingungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb sind in den letzten Jahren in der Literatur mehrfach behandelt worden; sie sind bedingt durch den Einfluß der Motormasse auf das Triebwerk, wobei die Elastizität des Antriebs von bestimmendem Einfluß ist. Diese Schwingungen tragen ausgesprochenen Resonanzcharakter und werden besonders wirksam bei vorhandenem Lagerspiel und bei mit der Kurbelstellung veränderlicher Elastizität der Triebwerksteile. Das Werkchen gibt eine sehr eingehende, durch theoretische Betrachtungen vervollkommnete Erklärung dieser besonderen Schwingungserscheinungen.

Prag. T. Pöschl. 629

Prof. Dr. WILHELM **HORT**, Oberingenieur der AEG-Turbinenfabrik, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Berlin. Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Darstellung der für Ingenieure und Physiker wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen einschließlich der Näherungsverfahren und mechanischen Hilfsmittel. Mit besonderen Abschriften über Variationsrechnung und Integralgleichungen. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage unter Mitwirkung von Dr. phil. W. Birnbaum und Dr.-Ing. K. Lachmann. Mit 808 Abb. im Text und auf 2 Tafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. VI + 700 S. Preis geb. 25,50 M.

In der jetzt vorliegenden zweiten Auflage ist der Grundzug des Werkes und seine Anlage unverändert geblieben, die schon der ersten die Anerkennung Vieler gesichert hat. Vor allem ist es der Vorzug der außerordentlichen Reichhaltigkeit, der diese günstige Aufnahme begründete. Indessen darf nicht übersehen werden, daß das Werk seinem Inhalte nach als eine Sammlung von Einzelentwicklungen erscheint, und Viele werden es störend empfinden, daß es den Forderungen nach einer strengen Systematik im Aufbau und in der methodischen Durchführung nicht völlig genügen kann. — Um bei den Differentialgleichungen erster Ordnung zu beginnen, so wäre es nach Ansicht des Berichterstatters entschieden vorteilhafter, den Reigen der Beispiele (bei der Integration durch Trennung der Veränderlichen) nicht gerade mit der Staukurve zu eröffnen, sondern mit irgend welchen anderen, bei denen die Diskussion der Lösung einfacher ist. In einem Buche über Differentialgleichungen soll doch das Methodische die Hauptsache sein, gegen das die Besonderheiten zurücktreten müssen, die damit unmittelbar nichts zu tun haben. Die übrigen »lösbaren Fälle« aus dieser Gruppe sind sehr unvollständig abgetan, und viele wichtige Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung, wie z. B. die Clairautsche Form und dergl. sucht man vergebens. Eingehender sind die Gleichungen zweiter Ordnung behandelt, wenn es auch hier durchgehends wünschenswert gewesen wäre, jedesmal zuerst die Methode auseinanderzusetzen und dann ihre Anwendung auf Beispiele anzuschließen. Daß die in § 32 verwendete Methode die der Variation der Konstanten ist, wird nicht gesagt, diese Methode vielmehr erst in § 35 in der üblichen Weise dargelegt. Zahlreich und begrüßenswert sind die Anwendungen auf elastische und dynamische Probleme, wenn sie auch nur Bekanntes bringen. Besonders wichtig in diesem Zusammenhange ist der Abschnitt VI, über zeichnerische und rechnerische Näherungsmethoden zur Auflösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei auch die Arbeiten neuerer Autoren, wie G. Duffing, L. Guembel, E. Meißner u. a. ihrer Bedeutung entsprechend berücksichtigt sind; insbesondere sind auch die Fragen der Fehlerabschätzung und die Ueberprüfung der Genauigkeit eingehend behandelt, ebenso auch die mechanischen Integraphen verschiedener Systeme.

Ungefähr die Hälfte des Werkes ist den partiellen Differentialgleichungen gewidmet, wobei die schwingende Saite und die damit in Zusammenhang gebrachten Fourierschen Reihen, die numerische Bestimmung ihrer Beiwerte und der harmonische Analysator von Henrici-Coradi eingehend besprochen sind. Von weiteren Schwingungsproblemen folgen die Transversalschwingungen des Stabes, ihre Erweiterung auf die Schiffsschwingungen, die Schwingungen der Membran und der elastischen Platte, ferner die Gleichungen der Wärmeleitung, der Hydrodynamik, des Newtonschen Potentials und der Elektrodynamik. Zwei neue Abschnitte am Ende des Werkes geben eine Einführung in die Grundlagen der Variationsrechnung und in die Theorie der linearen Integralgleichungen, die sehr anschaulich von der Deutung des Kernes als »Einfluß-

funktion« ausgeht und auf diesem Wege zu den grundlegenden Formulierungen gelangt. Die Fredholmschen Sätze und eine Anwendung auf die erzwungenen Schwingungen von Stäben schließt das reichhaltige Werk, dem auch ausführliche Literaturangaben und Register beigefügt sind.

Es muß hier noch eines Umstandes Erwähnung getan werden, der die Benutzung des Werkes gerade für den Anfänger sehr erschweren dürfte, das sind die äußerst zahlreichen Druckfehler, die unverbessert stehen geblieben sind. Der Berichterstatter hat bei der Durchsicht eine so große Zahl bemerkt, daß ihre Aufzählung hier unterbleiben muß. Im Interesse der gesamten Leserschaft, für die dieses Werk bestimmt ist, muß der Wunsch ausgesprochen werden, daß ihr künftighin eine Auflage vorgelegt werde, die nicht durch so zahlreiche Druckfehler entstellt ist.

Prag. T. Pöschl. 632

Ferner sind bei der Schriftleitung eingegangen (Ausführliche Besprechung vorbehalten):

H. **GEPPERT.** Ist die Welt absolut oder relativ? Vollständige Widerlegung der Relativitätstheorie. Eine Grundlage für die Weltanschauung. Leichtverständlich. Kommiss. Verlag J. J. Reiff, Karlsruhe 1923. 79 S.

G. **SCHWEIKERT.** Innere Ballistik. Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1923. 106 S.

MORITZ **PASCH** in Gießen. Mathematik und Logik. Vier Abhandlungen. Zweite Auflage. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1924. 46 S. Preis 2 M.

Dr. D. **GAWRONSKY,** Privatdozent an der Universität Bern. Der physikalische Gehalt der speziellen Relativitätstheorie. Verlag J. E. Engelhorns Nachf., Stuttgart 1925. 64 S.

ALEXANDER **BRILL,** Tübingen. Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen. Mit 126 Abb. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1925. X + 340 S. Preis geh. 17,50 M, geb. 20 M.

Dr.-Ing. L. A. **OTT.** Theorie und Konstantenbestimmung des hydrodynamischen Flügels. Mit 25 Abb. im Text. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. 49 S.

OTTO **HÖLDER,** o. Professor an der Universität Leipzig. Die mathematische Methode. Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik. Mit 235 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. X + 563 S.

ADOLF **KNESER,** Professor an der Universität Breslau. Lehrbuch der Variationsrechnung. Zweite umgearbeitete Auflage. Mit 13 Abb. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1925. VII + 397 S. Preis geh. 22 M, geb. 24 M.

Dr. HERMANN **ROTHE,** Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Einführung in die Tensorrechnung. Verlag von L. W. Seidel & Sohn, Wien 1924. 179 S. Preis geh. 5 M.

Dr. ADOLF **HESS,** Professor am kantonalen Technikum in Winterthur. Analytische Geometrie für Studierende der Technik und zum Selbststudium. Mit 140 Textabb. J. Springer, Berlin 1925. 172 S. Preis 7,50 M.

NACHRICHTEN

Al. A. Tschuprow †. Am 19. April d. J. starb in Genf im Alter von 52 Jahren nach schwerem und langem Herzleiden Alexander Alexandrowitsch Tschuprow. Die statistische Wissenschaft verlor in ihm einen Theoretiker allerersten Ranges, einen Mann, der es sich zur Lebensaufgabe gemacht hatte, die logischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen der Statistik einer weiterführenden, gründlichen Bearbeitung zu unterziehen.

Wie früh Al. A. Tschuprow seine wissenschaftlichen Ziele bereits bewußt erfaßt hatte, beweist die Tatsache, daß er, 18 Jahre alt, sich an der mathematischen Fakultät der Moskauer Universität mit dem ganz bestimmten Vorsatz immatrikulierte, um sich die mathematische Vorbildung anzueignen und später die Mathematik auf die Sozialwissenschaften anzuwenden. Nach Beendigung der mathematischen Fakultät studierte er Sozialwissenschaften in Berlin und Straßburg, hauptsächlich bei L. v. Bortkiewicz und G. Knapp. Der erste half dem jungen Gelehrten, der schon in seiner Moskauer Dissertation viele seiner späteren Ideen entwickelt hat, in die Gedankenwelt der damals noch neuen Lexisschen Richtung tiefer einzudringen; der Knappschen Schule verdankte Tschuprow die große Vollendung seines Könnens, die Tatsachen zu bemeistern. Seine Lehrtätigkeit begann schon im Jahre 1902 an dem Lehrstuhle der Statistik der ökonomischen Fakultät des damals neu gegründeten Petersburger Polytechnischen Instituts und dauerte mit großem Erfolge bis 1917. Im Sommer dieses Jahres ging er zum letzten Mal für die Sommerferien ins Ausland, um nie wieder zurückzukehren.

Es ist unmöglich in diesem knappen Raume die große Fülle der wissenschaftlichen Leistungen des Geschiedenen zu würdigen. Seine 1909 erschienenen »Aufsätze zur Theorie der Statistik«, deren Hauptideen auch dem deut-

schen Leser durch seine Publikationen im Schmollerschen Jahrbuche (1905) und dem Sombartschen Archiv (1906) zugänglich gemacht wurden, waren schon eine Leistung großen Stils und die Frucht fast fünfzehnjähriger Studien. Es ist eine synthetische Darstellung einer Reihe von Hauptproblemen der statistischen Theorie, wo die Ideen von Windelbandt und Rickert, Cournot und Kries mit den Ergebnissen der Lexis-Bortkiewiczschen Richtung und einer Reihe eigener tiefsinniger Gedanken organisch verschmolzen und glänzend dargestellt sind. Al. A. Tschuprows Studien »Zur Frage des sinkenden Knabenüberschusses unter den ehelich Geborenen« (1913) zeigten ihn als einen wahren Meister der empirischen Forschung. Doch was ihm einen großen Ruhm schuf und ihm seine Stelle in der Geschichte der Statistik als eines ihrer schöpferischen Geister sicherte, war eine Reihe von logischen und mathematischen Untersuchungen, mit denen Al. A. Tschuprow während des letzten Dezeniums beschäftigt war. Eine klare Absonderung der apriorischen von den aposteriorischen Elementen des statistischen auf die Wahrscheinlichkeitstheorie sich gründenden Wissens; scharfe Erfassung verschiedener Probleme, die der Erforschung der ersteren durch die empirische Gegebenheit der letzteren gestellt werden; die Weiterbildung des Tschebyscheff-Markoffschen Verfahrens der mathematischen Erwartungen; seine Anwendung auf die schwierigsten Fragen der Stabilität der statistischen Reihen, auf die Momente der Häufigkeitsverteilungen und auf die Probleme der Korrelationstheorie — das sind die Hauptthemata des mitten in der noch auf lange Jahre geplanten Arbeit durch so frühen Tod von uns entrissenen Forschers. Die Synthese der englischen mit der kontinentalen Richtung in der Theorie der Statistik kann man schon als eine gelungene und in vielen Hauptzügen schon durchgeführte Tat ansehen.

Es fehlte auch nicht an der hohen Bewertung der wissenschaftlichen Verdienste Tschuprows. Schon seit langem war er Mitglied des Internationalen Statistischen Instituts, im Jahre 1917 wurde er zum korrespondierenden Mitglied der Petersburger Akademie der Wissenschaften und 1923 zum Ehrenmitglied der Royal Statistical Society erwählt. Während seiner Reise nach Skandinavien im Jahre 1924, auf der er in Kopenhagen einen Vortrag und in Oslo eine Reihe von Vorlesungen über die Korrelationstheorie hielt, hatte er das Glück, die volle und feierliche Anerkennung seiner Ideen zu sehen.

Mit großer Bildung und feinem Kunstverständnis vereinigte Al. A. Tschuprow die Gabe, seinen Mitmenschen mit wahrer Sympathie und intimem Verständnis gegenüberzutreten. Obgleich seine ganze Lebensführung mit großer Kunst und Zähigkeit den Ansprüchen der wissenschaftlichen Forschung angepaßt wurde, nahm ihm doch in den letzten Jahren sein Briefwechsel mit Schülern und Kollegen einen erheblichen Teil seiner ganzen Arbeitszeit; und er, der in allen seinen Bedürfnissen geschickt zu wirtschaften wußte, wollte in diesem Punkte nicht sparen. Und so wird er in unserem Gedächtnis auch weiterleben: nicht nur als ein großer Forscher und hervorragender Lehrer, sondern auch als eine große edle Persönlichkeit.

Moskau. Eugen Slutsky. 693

Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik in Zürich[1]. Zur Teilnahme an dem zweiten internationalen Mechanik-Kongreß, der wie bereits berichtet, vom 12. bis zum 18. September dieses Jahres in Zürich tagt, haben sich über zweihundert Personen angemeldet. Außer den allgemeinen Vorträgen, deren Titel hier schon mitgeteilt wurden, sind 71 Sektionsvorträge angenommen worden, die sich wie folgt auf die einzelnen Sektionen verteilen:

Sektion I: Rationelle Mechanik 20
Sektion II: Elastizität, Festigkeit, Struktur der Materie 32
Sektion III: Hydro- und Aeromechanik . . 19

Die Vortragenden verteilen sich auf die folgenden Länder: Belgien, Dänemark, Deutschland, England, Frankreich, Holland, Italien, Norwegen, Oesterreich, Polen, Rumänien, Schweiz, Schweden, Tschechoslowakei, Japan und die Vereinigten Staaten. Rußland ist nur durch Emigranten vertreten, da die russische Regierung ihren Gelehrten keine Ausreiseerlaubnis nach der Schweiz erteilt.

Das vollständige Programm des Kongresses wird allen, die sich zur Teilnahme angemeldet haben, Ende August zugehen.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. In einer besonders stark von Mitgliedern und Gästen besuchten Versammlung der Ortsgruppe Berlin sprach am 19. Juli im Uebungssaal des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin Herr Prof. Dr. Erwin Schrödinger von der Universität Zürich über eine Fortbildung der Newtonschen Mechanik auf Grund ihrer Analogie mit der Optik. Seit den Arbeiten Hamiltons (1830) war die weitgehende formale Analogie bekannt, die zwischen den Differentialgleichungen der Mechanik und denen der geometrischen (Strahlen-)Optik besteht. Andererseits hat die physikalische Forschung der letzten Jahrzehnte zahlreiche Unstimmigkeiten der klassischen Mechanik aufgedeckt, und zwar immer bei solchen Problemen, bei denen es sich um sehr kleine Teilchen oder um Bahnen von sehr kleinen Krümmungsradien handelt. Schrödinger faßte nun den Gedanken, diese Abweichungen in ähnlicher Weise zu erklären, wie die Erscheinungen der physikalischen Optik, z. B. die Beugung, durch die Wellennatur des Lichtes erklärt werden. Wenn Abmessungen auftreten, die mit der Wellenlänge des Lichtes von gleicher Größenordnung sind,

[1]) Vergl. auch S. 84 und 264 ds. Bandes.

verliert der Begriff des Lichtstrahles jede Bedeutung und die Beobachtungen folgen genau den Gesetzen, die man aus den Gleichungen der Wellenfortpflanzung gewinnt. So ist nach Schrödinger auch unsere gegenwärtige Mechanik nur eine Näherung, die solange gilt, als die Dimensionen, mit denen man es zu tun hat, groß sind gegen die Wellenlänge einer »Materiestrahlung«. Die Bewegung der Elektronen um den Kern innerhalb eines Atomes lassen sich beschreiben durch eine Differentialgleichung, die die Fortpflanzung der Materie-Wellen, ähnlich der optischen Wellengleichung, reguliert. Erstaunlich groß sind die Erfolge dieser Theorie, die Schrödinger selbst und mehrere Autoren, die seinen Anregungen gefolgt sind, bereits erzielen konnten. Vor allem ergeben sich in bester Uebereinstimmung mit den Beobachtungen die Frequenzen der vom Wasserstoffatom ausgesandten Strahlung, für die es bisher keinerlei vernünftige Theorie gab. — Man geht wohl nicht fehl in der Annahme, daß die Schrödingersche Theorie eine der weittragendsten Umwälzungen auf dem Gebiete der Mechanik bedeutet, vergleichbar etwa der Einsteinschen Relativitätstheorie. Wie bald und in welchen Punkten auch die technische Mechanik von diesen neuen Gedanken beeinflußt werden wird, läßt sich heute noch nicht voraussagen.

Persönliches. Herr Dr. Alfred Basch, Oberbaurat des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, hat sich an der Technischen Hochschule in Wien für praktische Analysis mit besonderer Berücksichtigung der Ausgleichsrechnung habilitiert.

Herr Privatdozent Professor Dr. Ludwig Schiller an der Universität Leipzig ist ebenda zum planmäßigen außerordentlichen Professor der angewandten Mechanik und Thermodynamik ernannt worden. 694

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zum Turbulenzproblem. Zu der Abhandlung von Hrn. F. Noether »Zur asymptotischen Behandlung der stationären Lösungen im Turbulenzproblem« im vorangehenden Heft dieser Zeitschrift möchte ich die folgenden Bemerkungen machen:

Hr. Noether bezieht sich in dem Zusatz S. 243 auf meinen in dieser Zeitschrift abgedruckten Vortrag vom Physikertag in Jena »Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz«[1]) und auf die daran anknüpfende Arbeit von Tietjens[2]) und bemerkt dabei, daß seine Rechnung sich »auf ideal glatte und starre« Wände beziehe, unsere aber auf »praktisch glatte Wände, die Querbewegungen zulassen«. Die Grenzbedingungen, mit denen wir arbeiten, sind aber genau dieselben, wie die bei Noether, so daß ich diese Unterscheidung nur auf ein Mißverständnis zurückführen kann, das vielleicht seinen Grund darin haben mag, daß in der Tietjensschen Abhandlung, die einen stark gekürzten Auszug aus der Dissertation darstellt, infolge dieser Kürzungen manches nicht so klar zum Ausdruck kommt wie es in der Dissertation der Fall ist. Man kann die Methode in der Noetherschen Ausdrucksweise etwa so charakterisieren. Es wird eine »langsame Lösung« φ_1 an dem einen Rande mit einer »raschen Lösung« φ_2, die nach innen hin abklingt und am anderen Rand mit einer raschen Lösung φ_3 von der gleichen Art so kombiniert, daß an beiden Rändern sowohl die Summe der beiden in Betracht kommenden Lösungen, wie auch der Differentialquotient dieser Summe verschwindet. Bei Tietjens ist nur die Zerlegung etwas anders vorgenommen, indem als »rasche Lösung« in der Nähe des Randes $\varphi_2 + \varphi_{10}$ genommen wird, wobei die letztere Größe den Wert der Lösung φ_1 am Rande bedeutet. Durch diese andersartige Bezeichnung mag vielleicht der Eindruck erweckt sein, daß es sich um bewegte Wände handelt, während gerade die Lösung so angesetzt wird, daß die Wand sich nicht bewegt. Es ist dann nur gesagt, daß wenn man die rasche Lösung fortlassen will, man ihren Einfluß auf die langsame Lösung durch eine fiktive Bewegung der Wand zum Ausdruck bringen könne. Hr. Noether meint, daß die verfügbaren Konstanten nicht ausreichten, um an beiden Wänden die Quergeschwindigkeit v exakt zum Verschwinden zu bringen. Es ist aber gerade gegenüber dem Rayleighschen Fall die Lösung so verändert, daß die verfügbaren Konstanten zur Erfüllung der Grenzbedingungen ausreichen.

Hr. Noether sagt im Eingang des Zusatzes, daß er die Nachprüfung des Parabelprofiles nur unter Vernachlässigung von α^2 durchgeführt habe, wie dies auch in der erwähnten Tietjensschen Arbeit geschehen sei. Dazu ist zu sagen, daß das Glied mit α^2 in den beiden Ausdrücken A und B (Gleichung 7 und 8 bei Noether) verschiedene Wichtigkeit hat. Tietjens hat es in dem Ausdruck A, der die Reibungsglieder darstellt, vernachlässigt, was damit zu begründen ist, daß die Reibung sich wesentlich in einer Grenzschicht abspielt. In dem Ausdruck B, der die Trägheitsglieder darstellt und der ja mit dem zahlenmäßig großen Wert S multipliziert ist, hat Tietjens aber α^2 nicht vernachlässigt und das ist auch sehr wesentlich. Ich weiß nun nicht, ob Hr. Noether ebenso verfahren ist, jedenfalls zeigen unsere Resultate (Tietjens Abb. 17 und 18),

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 431.
[2]) Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 200.

daß ein verwickelter Gang mit α (dort kb_1) besteht und für kleine α in der Tat Stabilität erhalten wird, während für größere α die Labilität einsetzt.

Göttingen, den 9. Juli 1926.

L. Prandtl.

* * *

Erwiderung. Zu der vorstehenden Zuschrift möchte ich vorweg bemerken, daß die betr. Aeußerungen in dem Zusatz zu meiner Arbeit hauptsächlich eine Orientierung über die Verschiedenartigkeit der Gesichtspunkte in der Prandtlschen Arbeit gegenüber meiner eigenen, an die frühere Problemstellung anschließenden Untersuchung bezweckten. Den Prandtl-Tietjensschen Gedankengang habe ich keineswegs mißverstanden, denn meine Darstellung desselben stimmt mit dem überein, was in der obigen Zuschrift bezüglich der Zusammensetzung der Lösung aus den Partikularlösungen wiederholt wird. Meine Auffassung bleibt aber die, daß man auf diesem Wege die viel schwierigere Frage nach der strengen Erfüllbarkeit homogener Randbedingungen nicht beantworten kann, sondern höchstens eine näherungsweise Erfüllung erreicht, die allerdings um so genauer sein kann, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Man könnte z. B. die nämliche Methode mit dem entsprechenden Erfolg auch auf die ähnliche, aber selbstadjungierte Differentialgleichung (19) meiner Arbeit anwenden, obgleich hier doch nach Nr. 4 von vornherein feststeht, daß die geforderten Eigenwerte nicht vorhanden sind. Dies und nichts weiter meine ich mit dem Ausdruck, die Prandtl-Tietjenssche Lösung beziehe sich auf »praktisch«, nicht »ideal« glatte und starre Wände. Im Uebrigen halte ich schon die zugrunde gelegten Rayleighschen Lösungen nicht für geeignet, um Aussagen zu machen, die sich auf Randbedingungen an zwei Rändern beziehen, wegen der kritischen Schicht ($U - c = 0$), über die man sie nicht ohne Weiteres fortsetzen kann.

Dagegen habe ich in der Tat übersehen, daß Tietjens das eine der α^2-Glieder berücksichtigt, was aber für den oben erklärten prinzipiellen Unterschied gegenüber meiner Problemstellung nicht von Bedeutung ist. Ich brauche wohl nicht zu wiederholen, daß meine allgemeine Untersuchung sämtliche α^2-Glieder berücksichtigt. Nur für die erwähnte numerische Rechnung, die möglicherweise (ich halte es für unwahrscheinlich) bei kleinem R für ein Zwischengebiet labile Zustände ergeben könnte, habe ich vorläufig alle α^2-Glieder weggelassen. 692

Breslau, 17. Juli 1926. F. Noether.

Berichtigung.

In der Arbeit von E. Slutsky »Ueber die zufällige zyklische Anordnung paarweise gleicher Elemente« sind folgende sinnstörende Druckfehler unterlaufen.

Seite	Zeile	Statt	Lies
152	Formel (10)	$P_{s/s} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2s-1)}$	$P_{s/s} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2s-1)}$
154	7 von oben	$\frac{h,\,001}{s\,(2)}$	$\frac{k,\,001}{s\,(2)}$
155	10 » »	$2s - k + 6$	$2s - \overline{k + 6}$
	15 » »	$P_{\frac{k,\,01}{s-(2)}}$	$P_{\frac{k,\,01}{s\,(2)}}$
	17 » »	$P_{\frac{k,\,001}{s-(2)}}$	$P_{\frac{k,\,001}{s\,(2)}}$
	3 von unten	$P^{\frac{2,01}{5\,(1)}}$	$P^{\frac{2,01}{5\,(2)}}$
	6 » »	$P^{\frac{1,0}{5\,(0)}}$	$P^{\frac{1,0}{5\,(2)}}$
157	24 » »	$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{P_i}$	$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}$
	28 » »	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{i} \frac{\varepsilon_i^2}{n_i}$	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i^2}{n_i}$

(Redaktionsschluß 30. Juli 1926.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 23, Sigmundshof 9;
für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.